UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL CÓRDOBA

CURSO DE INGRESO

MATEMÁTICA

AÑO 2021

Decano:
Ing. Rubén Soro.

Vicedecano:
Ing. Jorge Abet.

Secretario Académico:
Ing. Hector Macaño.

Director de Dpto. Materias Básicas:
Dr. Conrado Gallardo.

Sub Secretario de Planeamiento Académico (Coordinador Ingreso 2021):
Ing. Guillermo Karham

Secretario de Asuntos Estudiantiles:
Sr. Juan Manuel Saavedra

Coordinador de Matemática:
Prof. Lic. Espec. Dante Quinteros

Autores:
Prof. Lic. Espec. Dante Quinteros
Prof. Lic. Espec. Iván Martínez

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Sin dudas que estamos en una situación muy distinta a las que ya han pasado anteriores ingresantes de esta Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Córdoba, nuestra casa de estudios. También es un desafío poder transitar en la virtualidad este Curso de Ingreso y en especial para el área de Matemática. El objetivo de este material es que vos puedas usarlo como guía para reforzar lo que has visto en el área matemática y que has adquirido durante tus estudios en el ciclo de Nivel Medio.

Nuestra idea es que puedas contar con una herramienta que te permita llegar a tener una adecuada comprensión y poder entender los aspectos teóricos como así también sus aplicaciones, sumando a esto una importante y constante actividad de la parte práctica. Nuestra sugerencia es que leas las definiciones y conceptos teóricos, los cuales debes intentar interpretar y es probable que lo tengas que hacer varias veces antes de que logres descifrarlos y entenderlos. Debes prestar especial atención a los ejemplos y ejercicios de cada clase y que trates de hacerlos para lograr una mayor comprensión.

Resuelve los problemas y ejercicios propuestos y como dice la conocida frase: “no te des por vencido ni aún vencido”. Es muy posible que no llegues con éxito a la solución de algunos de ellos, pero no debes bajar los brazos, intenta nuevamente y seguro que lograrás resolverlos.

Vas a tener la oportunidad de contar también con la UV (Universidad Virtual) y con la correspondiente aula para consultas en los Foros con los docentes y también compartir dudas con tus compañeros y compañeras. Además cuentas en el aula virtual con más material de consulta, apoyo y práctica de todos los temas que comprende este curso.

No olvides que la matemática tiene sus exigencias y te solicita que saques lo mejor de ti: constancia, compromiso, voluntad y responsabilidad. Eres el principal actor de este ingreso y de cada una de las secuencias didácticas en donde tú eres quien vas a construir tu propio aprendizaje y pasarás de ser ingresante a alumno regular de esta querida facultad.

Bienvenido y todos los éxitos!

Los autores

CLASE Nº 1

Historia de los números

Los egipcios utilizaron por primera vez las fracciones comunes alrededor del año 1000 a. C.; alrededor del 500 a. C. el grupo de matemáticos griegos liderados por Pitágoras se dio cuenta de la necesidad de los números irracionales. Los números negativos fueron inventados por matemáticos indios cerca del 600, posiblemente reinventados en China poco después, y no se utilizaron en Europa hasta el siglo XVII, si bien a finales del XVIII Leonhard Euler descartó soluciones negativas para las ecuaciones porque lo consideraba irreal.

En realidad, el estudio riguroso de la construcción total de los números reales exige tener amplios antecedentes de teoría de conjuntos y lógica matemática. Fue lograda la construcción y sistematización de los números reales en el siglo XIX por dos grandes matemáticos europeos utilizando vías distintas: **la teoría de conjuntos de Georg Cantor** (encajamientos sucesivos, cardinales finitos e infinitos), por un lado, y **el análisis matemático de Richard Dedekind** (vecindades, entornos). Ambos matemáticos lograron la sistematización de los números reales en la historia no de manera espontánea, sino echando mano de todos los avances previos en la materia: desde la antigua Grecia y pasando por matemáticos como Descartes, Newton, Leibniz, Euler, Lagrange, Gauss, Riemann, Cauchy y Weierstrass, por mencionar sólo a los más sobresalientes.

GÉNESIS DE LOS NÚMEROS

$$\mathbb{C}\ \text{Complejos}\begin{cases}\mathbb{R}\ \text{Reales}\begin{cases}\mathbb{Q}\ \text{Racionales}\begin{cases}\mathbb{Z}\ \text{Enteros}\begin{cases}\mathbb{N}\ \text{Naturales}\\ \text{Enteros negativos}\end{cases}\\ \text{Fraccionarios}\end{cases}\\ \text{Irracionales}\end{cases}\\ \text{Imaginarios}\end{cases}$$

Números Naturales

Un **número natural** es cualquiera del conjunto de los números: (0)*, 1, 2, 3, 4, 5..., que se pueden usar para contar los elementos del mismo u otro conjunto.

- Existe cierta polémica sobre si el cero está incluido o no en el conjunto de los naturales. Algunos matemáticos (especialmente los de Teoría de Números) prefieren no reconocer el cero como un número natural, mientras que otros, especialmente los de Teoría de conjuntos, Lógica e Informática, tienen la postura opuesta.

Números Enteros

Los números enteros son una generalización del conjunto de números naturales que incluye números negativos (resultados de restar a un número natural otro mayor además del cero). Así los números enteros están formados por un conjunto de enteros positivos que podemos interpretar como los números naturales convencionales, el cero, y un conjunto de enteros negativos.

Números Racionales

Se dan por conocidos los números naturales {0,1,2,3,4,...,10,11,...} . El conjunto de todos ellos se representa con la letra $\mathbb{N}$.

Los enteros ($\mathbb{Z}$) son los naturales y sus opuestos 1, -1, 2, -2, 3, -3,...

La definición de números racionales es: $x \in \mathbb{Q} \iff a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ tales que $x = \frac{a}{b}$

Es decir, se dice que un número es racional si se puede escribir como la fracción de dos números enteros. Los números racionales también se pueden detectar por su forma decimal ya que todos tienen una expresión finita o periódica.

$-3 \qquad \frac{57}{25} = 2,28 \qquad \frac{22}{6} = 3,6666666... = 3,\widehat{6}$ son todos números racionales.

Números Reales

Los números reales miden cantidades continuas que se expresan con fracciones decimales que tienen una secuencia infinita de dígitos a la derecha de la coma decimal, como por ejemplo 324,8232. Frecuentemente también se representan con tres puntos consecutivos al final (324,823211247…), lo que significa que aún faltan más dígitos decimales, pero que se consideran sin importancia.

Las medidas en las ciencias naturales (y por ende también en las físicas) son siempre una aproximación a un número real. No sólo es más conciso escribirlos con forma de fracción decimal (es decir, números racionales que pueden ser escritos como proporciones, con un denominador exacto) sino que, en cualquier caso, cunde íntegramente el concepto y significado del número real. En el análisis matemático los números reales son objeto principal de estudio. Puede decirse que los números reales son la herramienta de trabajo de las matemáticas de la continuidad, como el cálculo y el análisis matemático, mientras que los números enteros lo son de las matemáticas discretas, en las que está ausente la continuidad.

En matemática usamos el símbolo $\mathbf{R}$ (o) $\mathbb{R}$ para representar el conjunto de todos los números reales.

La notación matemática se $\mathbb{R}^n$ refiere a un espacio de *n* dimensiones de los números reales; por ejemplo, un valor $\mathbb{R}^3$ consiste de tres números reales y determina un lugar en un espacio de tres dimensiones.

En matemática, la palabra "real" se usa como adjetivo, con el significado de que el campo subyacente es el campo de los números reales. Por ejemplo, *matriz real*, *polinomio real*, etc.

Operaciones

Con números reales pueden realizarse todo tipo de operaciones básicas, consideradas ya vistas por el alumno, con dos excepciones importantes:

1.- **No existen** raíces de orden par (cuadradas, cuartas, sextas, etc.) de números negativos en el campo de los números reales, razón por la que existe el conjunto de los números imaginarios donde estas operaciones sí están definidas.

2.- **No existe** la división por cero, pues carece de sentido dividir entre nada o entre nadie.

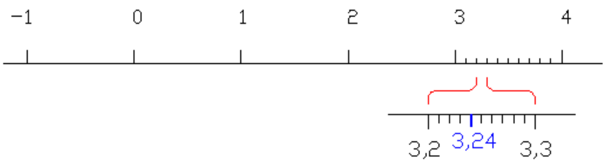
Estas dos restricciones tienen repercusiones importantes en ramas más avanzadas de las matemáticas: existen asíntotas verticales en los lugares donde una función se indefine, es decir, en aquellos valores de la variable en los que se presenta una división entre cero, o no existe gráfica real en aquellos valores de la variable en que resulten números negativos para raíces de orden par, por mencionar un ejemplo de construcción de gráficas en geometría analítica.

La principal característica del conjunto de los números reales es la **completitud**, es decir, la existencia de límite para dada sucesión.

Recta real

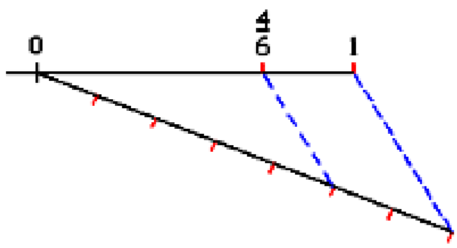
En la recta real cada punto corresponde a un número real, de ahí su nombre.

Entero o decimal exacto: Vamos a intentar representar un número al azar, el 3,24 por ejemplo, buscamos el 3,2 primero, "ampliamos" buscamos el 3,24 y marcamos.



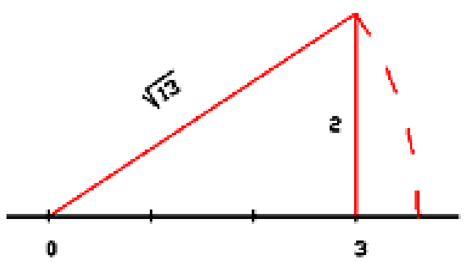
Decimal periódico

Hacemos con la regla una recta oblicua a la primera y que mida un múltiplo del denominador dividimos esta nueva recta en tantas partes como indique el denominador (si el denominador es 7 dividimos en siete partes), unimos sus extremos y trazamos las paralelas.



Radical cuadrático

Podemos representar un radical cuadrático teniendo en cuenta el Teorema de Pitágoras. En el ejemplo se muestra como se ha representado $\sqrt{13}$.



Resto de irracionales

En este caso se toma su expresión aproximada decimal y se afina tanto como se quiera empleando el método mostrado en decimales exactos.

Intervalos

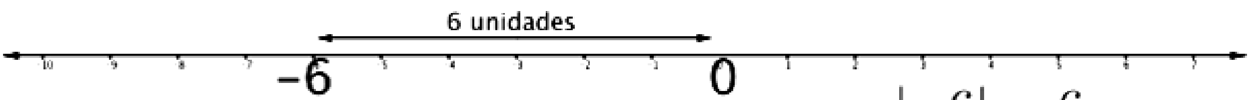
Conjunto de todos los números reales comprendidos entre dos números dados (extremos) o entre un número e infinito (+/- infinito).
Los Intervalos son subconjuntos de la recta numérica, es decir, representan a un conjunto de números que son subconjuntos del conjunto de los números reales. Geométricamente, los intervalos corresponden a semirrectas o segmentos de recta, incluidos en la recta real. Los intervalos de números correspondientes a segmentos de recta son intervalos finitos (aunque contenga infinitos elementos), los intervalos correspondientes a semirrectas y a la recta real son intervalos infinitos. Se dice que un intervalo finito es cerrado, si contiene a sus dos extremos, semiabierto, si contiene a un extremo pero no al otro, y abierto, si no contiene a ninguno de sus extremos. Los extremos también se llaman puntos frontera y constituyen la frontera del intervalo. Los puntos restantes del intervalo son los puntos interiores y juntos forman lo que llamamos el interior del intervalo. Se intentará explicar aquí la nomenclatura que existe para designar algunos tramos de la recta real:

	NOMBRE	SÍMBOLO	SIGNIFICADO	REPRESENTACIÓN
FINITOS	Intervalo abierto	(a,b)	$\{ x \,/\, a < x < b \}$ N° comprendidos entre a y b	a b
	Intervalo cerrado	$[a,b]$	$\{ x \,/\, a \leq x \leq b \}$ N° comprendidos entre a y b, éstos incluidos.	a b
	Intervalo semiabierto	$(a,b]$	$\{ x \,/\, a < x \leq b \}$ N° comprendidos entre a y b, incluido b	a b
		$[a,b)$	$\{ x \,/\, a \leq x < b \}$ N° comprendidos entre a y b, incluido a	a b
INFINITOS	Semirrecta	$(-\infty,a)$	$\{ x \,/\, x < a \}$ Números menores que a	a
		$(-\infty,a]$	$\{ x \,/\, x \leq a \}$ N° menores o iguales que a	a
		(a,∞)	$\{ x \,/\, a < x \}$ Números mayores que a	a
		$[a,\infty)$	$\{ x \,/\, a \leq x \}$ N° mayores o iguales que a	a

Valor absoluto de un número

- Es la distancia que hay entre un número y el cero.
- El valor absoluto se representa con el símbolo $|\ \ |$
- Por ejemplo el valor absoluto de (-6) ⟶ se escribe $|-6|$

* Anotamos en la recta numérica el 0 y el (-6)



$$\therefore \quad |-6| = 6$$

- Podemos decir que el valor absoluto de un número es el mismo número, pero sin signo.

Ejercicios

Dados los siguientes intervalos, encuentra la expresión de los mismos y cuál es el gráfico que lo representa:

1) $|x-2|<1$

2) $|x+3|<1$

3) $|x+1|\leqslant 4$

4) $|x-5|>1$

5) $|x+7|\geqslant 2$

6) $|2-x|<3$

Tipos de números decimales

Existen dos tipos de números decimales: los números decimales exactos y los números decimales infinitos. Dentro de los números infinitos tenemos números decimales periódicos puros, los números decimales periódicos mixtos y los no periódicos.

$$Decimales\begin{cases} Exactos:\ 0{,}56 \\ Infinitos\begin{cases} Periódicos\begin{cases} Puros:\ 1,\widehat{26} \\ Mixtos: 3{,}89\,\widehat{126} \end{cases} \\ No\ \ periódicos:\ \sqrt{2}=1{,}414213562... \end{cases} \end{cases}$$

Número decimal exacto

Los números decimales exactos son aquellos que tienen un número finito de cifras decimales, como por ejemplo:

$$0{,}56$$

Número decimal periódico puro

Los números decimales periódicos puros son aquellos que tienen infinitas cifras decimales, donde se va repitiendo un patrón, formado por una o más cifras, al que se le llama periodo:

$$1{,}26262626262626...$$

Se representa encerrando el periodo debajo de un arco, lo que indica que son esas cifras decimales las que se repiten continuamente:

$$1{,}26262626262626...=1,\widehat{26}$$

$$5{,}478478478478...=5,\widehat{478}$$

Número decimal periódico mixto

Los números decimales periódicos mixtos son aquellos que tienen infinitas cifras decimales, donde también se va repitiendo un periodo, pero delante del periodo existen cifras decimales que no se repiten, como por ejemplo:

$$3{,}89126126126126\ldots = 3{,}89\overset{\frown}{126}$$

En este ejemplo, las dos primeras cifras decimales no se repiten y luego tenemos el periodo que se repite infinitamente.

Número decimal infinito no periódico

Los números decimales no periódicos son aquellos que tienen infinitas cifras decimales, las cuales no se repiten siguiendo ningún patrón.

Por ejemplo, son números decimales infinitos no periódicos el número pi, raíz de 2 o raíz de 3:

$$\pi = 3{,}141592654\ldots$$

$$\sqrt{2} = 1{,}414213562\ldots$$

$$\sqrt{3} = 1{,}732050808\ldots$$

Una vez visto esto, vamos a ver ahora cómo podemos pasar los números decimales a fracción.

¿Cómo pasar un número decimal exacto a fracción?

Para pasar un número decimal exacto a fracción, se escribe en el **numerador el número decimal sin coma** y en el**denominador una potencia de 10, con tantos ceros como cifras decimales tenga el número.**
Por ejemplo, si queremos pasar a decimal el número 0,75, en el numerador pondremos 75, que es el número decimal sin la coma (quedaría 075, pero el 0 a la izquierda desaparece porque no tiene valor). En el denominador podremos un 100, es decir una potencia de 10 con 2 ceros, ya que el número decimal tiene 2 cifras:

$$0{,}75 = \frac{75}{100} = \quad \text{(Simplificando:)} \quad = \frac{15}{20}$$

Vamos a ver otro ejemplo: $3{,}214 = \frac{3214}{1000} =$

En este caso el numerador corresponde a 3214, que es lo que queda al quitar la coma y en el denominador ponemos un 1000, es decir, una potencia de 10 con 3 ceros, ya que el número tiene 3 cifras decimales.

Una vez pasado a fracción simplificamos y queda: $= \frac{1607}{500}$

¿Cómo pasar un número decimal periódico puro a fracción

Para pasar un número decimal periódico puro a fracción, en el **numerador** se escribe primero el **número sin coma y se le resta la parte entera** del número decimal. En el **denominador**, se escriben tantos 9 como cifras tenga el periodo.

Por ejemplo:

$$2,\widehat{34} = \frac{234-2}{99} =$$

En el numerador, el número sin coma sería 234, al que le restamos la parte entera, es decir, la que está a la izquierda de la coma, que en este caso es un 2. En el denominador, ponemos un 99, es decir, un número con 2 nueves, ya que el periodo tiene 2 cifras.

Una vez hecho esto, realizamos la resta en el numerador y si se puede se simplifica la fracción, que en este caso no se puede simplificar:

$$= \frac{232}{99}$$

Vamos a ver otro ejemplo: $0,\hat{6} = \frac{6-0}{9} =$

En este caso, para el numerador, el número sin coma corresponde a un 6, que le restamos la parte entera que es un 0. Para el denominador, como sólo tenemos una cifra en el periodo, entonces será un 9.

Después operamos en el numerador y simplificamos la fracción: $= \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

¿Cómo pasar un número decimal periódico mixto a fracción?

Para pasar un número decimal periódico mixto a fracción, en el **numerador**, se escribe primero el **número decimal sin coma y se le resta la parte que está fuera del periodo**, también sin coma, es decir la parte entera unida a los decimales que se quedan fuera del periodo.
El número del **denominador** estará formado **tantos 9 como cifras tenga el periodo, seguido de tantos 0 como cifras decimales halla fuera del periodo**.

Por ejemplo:

$$73,21\hat{5} = \frac{73215-7321}{900} =$$

En el numerador, el número sin coma sería 73215, al que le restamos la parte que queda fuera del periodo, sin coma, que en este caso es un 7321.

En el denominador, como tenemos una cifra dentro del periodo primero ponemos un 9, seguido de 2 ceros, que corresponde a las 2 cifras decimales que quedan fuera el periodo.

$$= \frac{65894}{900} = \frac{32947}{450}$$

Después operamos en el numerador y simplificamos la fracción:

Vamos a ver otro ejemplo para que te quede más claro: $0{,}6\hat{1} = \dfrac{61-6}{90} =$

Para el numerador, el número sin coma es 61 y le restamos la parte que queda fuera del periodo, que en este caso es un 6. En el denominador, ponemos primero un 9, ya que dentro del periodo hay una cifra y un 0, ya que tenemos una cifra decimal fuera del periodo.

Para terminar, se realiza la resta en el numerador y después se simplifica: $\dfrac{55}{90} = \dfrac{11}{18}$

Puedes comprobar si has pasado bien el número decimal a fracción tan sólo volviendo a realizar la división con la calculadora y viendo que el número decimal coincide.

Páginas WEB recomendadas por los autores:

Ejercicios de decimales a fracciones, con ayuda y resueltos. Operaciones básicas:
https://www.ejerciciosweb.com/fracciones/ejercicios-fracciones.html

Ejercicios de decimales a fracciones:
https://calculo.cc/Problemas/Problemas_bachillerato/primero_ciencias_sociales/preliminares/probl_num_decimales.html

CLASE Nº 2

Potencia de números

Una multiplicación formada por factores iguales se puede escribir en forma de potencia: a^b, donde a, conocida como la base, es el número que se repite y **b**, conocido como el exponente, es el número de veces que se repite el factor. Por ejemplo, tendríamos que

$$6^5 = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$$

Para este ejemplo de potencia tendríamos que la base es 6, mientras que el exponente es 5.

Potencias con exponentes enteros

Potencia con exponente entero positivo

Por notación, cuando en una potencia el exponente es entero positivo, tenemos que

$$a^b = \underbrace{a \cdots a}_{b \text{ veces}}, \qquad -a^b = -(\underbrace{a \cdots a}_{b \text{ veces}}), \qquad (-a)^b = \underbrace{(-a) \cdots (-a)}_{b \text{ veces}}.$$

Para determinar el signo de una potencia con exponente entero tendremos en cuenta que:

1. Las potencias con exponente par son siempre positivas. Esto quiere decir que, si tenemos una potencia a^b, entonces:

- Si a es positivo y b es par, entonces a^b es positivo.
- Si a es negativo y b es par, entonces a^b es positivo.

Ejemplo:

$$2^2 = 2 \cdot 2 = 4$$
$$(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = 4$$
$$(-5)^4 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = 625$$

2. Las potencias con exponente impar siempre tienen el mismo signo que su base. Esto quiere decir que, si tenemos una potencia a^b, entonces:

- Si a es positivo y b es impar, entonces a^b es positivo.
- Si a es negativo y b es impar, entonces a^b es negativo.

Ejemplos:

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$
$$(-2)^3 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = -8$$
$$(-5)^5 = (-5)\cdot(-5)\cdot(-5)\cdot(-5)\cdot(-5) = 3125$$

Potencia con exponente entero negativo

Una potencia con exponente negativo es igual al inverso multiplicativo de la base de la potencia elevado al exponente positivo (siempre que la base sea distinta de cero). Así, tenemos que

$$a^{-b} = \left(\frac{1}{a}\right)^b = \frac{1}{a^b}, \quad a \neq 0.$$

Y para $\left(\frac{1}{a}\right)^b$ se cumplen las mismas propiedades mencionadas anteriormente para exponentes positivos.

Ejemplos:

$$2^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$
$$(-2)^{-3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = (-\frac{1}{2})\cdot(-\frac{1}{2})\cdot(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{8}$$

Potencias de números racionales

Potencia de un número positivo

Cuando en una potencia la base es fraccionaria, elevamos tanto el numerador como el denominador al exponente.

$$\left(\frac{c}{d}\right)^b = \frac{c^b}{d^b}$$

Ejemplo: $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$

Potencia con base fraccionaria y exponente negativo

Una potencia con base fraccionaria y exponente negativo es igual al inverso multiplicativo de la base elevado al exponente positivo. Recordemos que el inverso de una fracción es igual a cambiar el numerador y el denominador entre sí, esto es, el inverso de $\frac{c}{d} = \frac{d}{c}$. Por lo tanto, tenemos que

$$\left(\frac{c}{d}\right)^{-b} = \left(\frac{d}{c}\right)^{b} = \frac{d^b}{c^b}$$

Ejemplo: $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{2}\right)^{3} = \frac{5^3}{2^3} = \frac{125}{8}$

Propiedades de las potencias. Esquema

Las potencias tienen propiedades que nos facilitan los cálculos con ellas. Por ejemplo, para calcular $5^8:5^6$, no hace falta hallar cada potencia. Basta con saber que podemos restar los exponentes, y el resultado es $5^2 = 25$. En este esquema tenemos un resumen de las principales propiedades: para producto y cociente (con la misma base o los mismos exponentes) y potencia de potencia.

Propiedades de las potencias:		**Ejemplos**
Producto	*Misma **BASE** sumamos los exponentes*	$8^7 \cdot 8^6 = 8^{7+6} = 8^{13}$
	*Mismos **EXPONENTES** multiplicamos las bases*	$7^2 \cdot 4^2 = (7 \cdot 4)^2 = 28^2$
Cociente	*Misma **BASE** restamos los exponentes*	$8^{13} : 8^6 = 8^{13-6} = 8^7$
	*Mismos **EXPONENTES** dividimos las bases*	$28^2 : 4^2 = (28:4)^2 = 7^2$
Potencia ***de potencia:***	*multiplicamos los exponentes*	$(8^2)^5 = 8^{2 \cdot 5} = 8^{10}$
***Exponente 1:** igual que no poner exponente*		$8^1 = 8$
***Exponente 0:** el resultado es 1* (concepto 0^0 que no existe)		$8^0 = 1$
***Suma/resta: NO HAY** propiedades.*		$3^2+4^2=9+16=25 \neq 7^2=49$

¡Cuidado! No hay propiedades para todo. Como ves, para la suma de potencias no queda más remedio que calcularlas y luego sumar. Elevar a 1 es dejar el número como está (lo ponemos "una" vez), y para que las propiedades funcionen siempre, se ha establecido el convenio de que elevar a 0 es la unidad (excepto 0^0, que no puede calcularse).

Propiedad	Ejemplo
$a^0 = 1$, a distinto de 0.	$2^0 = 1$
$a^1 = a$	$2^1 = 2$
$a^n a^m = a^{n+m}$	$2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3} = 2^5 = 32$
$a^n \div a^m = a^{n-m}$	$2^3 \div 2^2 = 2^{3-2} = 2^1 = 2$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{2}{4}\right)^2 = \frac{2^2}{4^2} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ ó $\left(\frac{2}{4}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1^2}{2^2} = \frac{1}{4}$
$(ab)^n = a^n b^n$	$(2 \cdot 3)^2 = 2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36$
$(a^n)^m = a^{nm}$	$(2^4)^2 = 2^{4 \cdot 2} = 2^8 = 256$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, a distinto de 0.	$2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$
$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$	$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$
$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{b^n}{a^n}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{-1} = \frac{2^1}{3^1} = \frac{2}{3}$
$0^n = 0$, n distinto de 0.	$0^2 = 0$

Números irracionales

Los números irracionales son aquellos que no se pueden expresar como una fracción o lo que es lo mismo no se pueden expresar en su forma decimal como un número finito o periódico todos son infinitos y no periódicos. Por ejemplo:

- $\sqrt{p}$ si *p* no es un cuadrado perfecto
- $\sqrt[n]{p}$ siendo en general *p* un número entero y *p* no es una potencia *n*-ésima
- Números como π ó *e*

Nota: en cualquier intervalo de dos números hay infinitos números irracionales.

Radicales

Nomenclatura:

$\sqrt[n]{a}$ es el **radical,** a es el **radicando** y n es el **índice** de la raíz.

Ya se ha visto que $\sqrt[n]{a} = b \iff a = b^n$

- Si $a \geq 0$, $\sqrt[n]{a}$ cualquier a y cualquier n
- Si $a < 0$, $\sqrt[n]{a}$ para valores impares de n

Forma exponencial de los radicales

ya que $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ $\qquad \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n$

ya que $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ $\qquad \sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{m \cdot \frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$

Propiedades de los radicales

$\boxed{\sqrt[np]{a^p} = \sqrt[n]{a}}$ ya que $\sqrt[np]{a^p} = a^{\frac{p}{np}} = a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

- Simplificar radicales $\qquad \sqrt[3]{534} \qquad \sqrt{78}$
- Pasar radicales a índice común. ¿Qué es más grande, ó?

$\sqrt[3]{534} = \sqrt[6]{534^2} = \sqrt[6]{285\,156} \qquad \sqrt[3]{534} < \sqrt{78}$

$\boxed{\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}}$ ya que $\sqrt[n]{a \cdot b} = (a \cdot b)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

- Sacar fuera de la raíz los factores que nos convengan. $\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} =$

$= \sqrt{5^2 \cdot 2} = \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{2} = 5 \cdot \sqrt{2}$

- Agrupar radicales $\sqrt{23} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{230}$

$\boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}}$ ya que $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

- Gracias a estas tres propiedades podemos juntar castillos de fracciones en un solo radical:

$$\frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt[3]{4}}{\sqrt[6]{40}} = \frac{\sqrt[6]{5^3}\cdot\sqrt[6]{4^2}}{\sqrt[6]{5\cdot 2^3}} = \sqrt[6]{\frac{5^3\cdot 2^4}{5\cdot 2^3}} = \sqrt[6]{2\cdot 5^2} = \sqrt[6]{100} = \sqrt[6]{10^2} = \sqrt[3]{10}$$

$\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p}}$ ya que $\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^p = \left(a^{\frac{1}{n}\cdot p}\right) = \left(a^p\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^p}$

$\boxed{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}}$ ya que $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n\cdot m}} = \sqrt[mn]{a}$

No se pueden sumar radicales distintos, sólo los semejantes (aquellos que tras simplificarlos tienen el mismo radicando y el mismo índice)

Es decir, yo no puedo sumar $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ ni tampoco $\sqrt[3]{5}+\sqrt{5}$

En cambio sí que puedo sumar $3\sqrt{7}+6\sqrt{7}-\sqrt{7}=8\sqrt{7}$

Hay veces que no es evidente:

$$\sqrt{8}-\sqrt{50}+\sqrt{98} = \sqrt{2^3}-\sqrt{2\cdot 5^2}+\sqrt{2\cdot 7^2} = 2\sqrt{2}-5\sqrt{2}+7\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

Racionalización de denominadores

Racionalizar una fracción con raíces en el denominador, es encontrar otra expresión equivalente que no tenga raíces en el denominador. Para ello se multiplica el numerador y el denominador por la expresión adecuada, de forma que al operar desaparezca la raíz del denominador

1er CASO (general)

$$\frac{1}{\sqrt[n]{(x\pm a)^e}} = \frac{\sqrt[n]{(x\pm a)^{n-e}}}{\sqrt[n]{(x\pm a)^e}\,\sqrt[n]{(x\pm a)^{n-e}}} = \frac{\sqrt[n]{(x\pm a)^{n-e}}}{\sqrt[n]{(x\pm a)^n}} = \frac{\sqrt[n]{(x\pm a)^{n-e}}}{(x\pm a)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}\mp\sqrt{b}}{\left(\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\right)\cdot\left(\sqrt{a}\mp\sqrt{b}\right)} = \frac{\sqrt{a}\mp\sqrt{b}}{a-b}$$

1er CASO (caso particular)

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a^e}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-e}}}{\sqrt[n]{a^e}\,\sqrt[n]{a^{n-e}}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-e}}}{\sqrt[n]{a^n}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-e}}}{a}$$

2^{do} CASO

$$\frac{1}{a \pm \sqrt{b}} = \frac{a \mp \sqrt{b}}{\left(a \pm \sqrt{b}\right) \cdot \left(a \mp \sqrt{b}\right)} = \frac{a \mp \sqrt{b}}{a^2 - b}$$

Ejemplos Resueltos

Como ya vimos, se pueden dar varios casos:

1. ***Si el denominador contiene un solo término formado por una sola raíz cuadrada. En este caso basta multiplicar numerador y denominador por la misma raíz cuadrada.***

Por ejemplo, si queremos racionalizar el denominador de la fracción: $\frac{5}{\sqrt{2}}$

Multiplicaremos numerador y denominador por $\sqrt{2}$

$$\frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}.\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Otro ejemplo. Racionalizar $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{18}}$

Si antes de racionalizar extraemos los factores que se puedan en el radical del denominador, tenemos:

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{18}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2.3^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}$$

Ahora basta multiplicar numerador y denominador por $\sqrt{2}$ para eliminar la raíz del denominador:

$$\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3}.\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{6}}{3.2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

También se puede directamente multiplicar numerador y denominador por $\sqrt{18}$

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{18}} = \frac{2\sqrt{3}.\sqrt{18}}{\sqrt{18}.\sqrt{18}} = \frac{2\sqrt{54}}{18} = \frac{\sqrt{54}}{9}$$

Y ahora extraemos factores de la raíz del numerador y simplificamos.

$$\frac{\sqrt{54}}{9} = \frac{\sqrt{2.3^3}}{9} = \frac{3\sqrt{2.3}}{9} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$, como vemos da el mismo resultado.

2. ***Si el denominador de la fracción contiene dos términos en uno de los cuales o en los dos hay una raíz cuadrada, se multiplica numerador y denominador por el conjugado del denominador. O sea si es una suma se multiplica por la resta, y viceversa.***

Por ejemplo: $\dfrac{7}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

Multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{5}+\sqrt{3}$

$$\frac{7}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{7\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}$$

En el denominador siempre va a aparecer un producto de una suma por una diferencia, o sea una expresión del tipo $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$$\frac{7}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{7\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}=\frac{7\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{7\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{5-3}=\frac{7\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{2}$$

Otro ejemplo: $\dfrac{2}{3+\sqrt{7}}$

Ahora multiplicamos numerador y denominador por $3-\sqrt{7}$

$$\frac{2}{3+\sqrt{7}}=\frac{2\left(3-\sqrt{7}\right)}{\left(3+\sqrt{7}\right)\left(3-\sqrt{7}\right)}=\frac{2\left(3-\sqrt{7}\right)}{9-7}=\frac{2\left(3-\sqrt{7}\right)}{2}=3-\sqrt{7}$$

3. ***Si el denominador sólo tiene un término con una raíz de índice cualquiera, n, se multiplica numerador y denominador por otra raíz de índice n que complete una potencia de exponente n.***

Por ejemplo: $\dfrac{1}{\sqrt[3]{25}}$

Factorizamos el radicando del denominador: $\dfrac{1}{\sqrt[3]{25}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{5^2}}$, y como $\sqrt[3]{5^3}=5$, vamos a multiplicar numerador y denominador por $\sqrt[3]{5}$ para completar la potencia de 5

$$\frac{1}{\sqrt[3]{25}}=\frac{1}{\sqrt[3]{5^2}}=\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5^2}\sqrt[3]{5}}=\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5^3}}=\frac{\sqrt[3]{5}}{5}$$

Otro ejemplo: $\dfrac{2}{\sqrt[4]{2}}$

Para que se elimine la raíz cuarta, la potencia tiene que estar elevada a 4, luego basta multiplicar por $\sqrt[4]{2^3}$

$$\frac{2}{\sqrt[4]{2}}=\frac{2\sqrt[4]{2^3}}{\sqrt[4]{2}\sqrt[4]{2^3}}=\frac{2\sqrt[4]{2^3}}{\sqrt[4]{2^4}}=\frac{2\sqrt[4]{2^3}}{2}=\sqrt[4]{2^3}$$

Otro ejemplo más

Racionalizar el denominador de la fracción: $\dfrac{x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$

Multiplicamos numerador y denominador por $\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)$

$$\frac{x\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}=\frac{x\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-\left(\sqrt{x-1}\right)^2}=$$

$$=\frac{x\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}{(x+1)-(x-1)}=\frac{x\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}{x+1-x+1}=\frac{x\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}{2}$$

Por tanto podemos escribir que: $\dfrac{x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}=\dfrac{x\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}{2}$

Páginas WEB recomendadas por los autores:

Ejemplos básicos:
https://www.youtube.com/watch?v=mpwEQ3usaEc

Ejercicios de potencias de fracciones:
https://es.slideshare.net/pedrovipa/potenciacin-fraccines

CLASE Nº 3

Expresiones algebraicas

Las expresiones que resultan de combinar números y letras relacionándolos con las operaciones habituales se llaman expresiones algebraicas. La parte de la matemática que utiliza las expresiones algebraicas se llama Álgebra.

Expresiones algebraicas enteras: monomios

Un monomio es una expresión algebraica en la que se utilizan letras, números y signos de operaciones. Las únicas operaciones que aparecen entre las letras son el producto y la potencia de exponente natural.

Elementos de un monomio

Dado el monomio: $5\,x^3$, se distinguen los siguientes elementos:

- coeficiente: **5**
- parte literal o variable: *x*
- exponente: **3**(de la parte literal)

El coeficiente de un monomio es el número que aparece multiplicando a la parte literal. Normalmente se coloca al principio. Si un monomio carece de coeficiente, este es igual a uno y nunca es *cero* ya que la expresión completa sería cero. Si algún término carece de exponente, este es igual a uno. Si alguna parte literal no está presente, pero se requiere, entonces se considera cero, ya que $\forall x \in \mathbf{R} : x^0 = 1$

Grado de un monomio

El grado de un monomio es igual a la suma de los exponentes de los términos.

Ejemplos

$5\,x^3\,y$ tiene grado 3, pues equivale a la expresión: **$5\,x^3\,y^1$** y la suma de los exponentes es 2+1 = 3

X tiene grado 1, pues equivale a la expresión: $1x^1$

En matemática se considera que el número cero es un monomio de grado “menos infinito” con el fin de que se respete la regla de que el grado del producto de los monomios es igual a la suma de los grados de los factores.

Monomios Semejantes

Dos monomios son semejantes si tienen la misma parte literal

$3x^2$ y $5x^2$ **son** semejantes
$5t$ y $8t$ **son** semejantes
$2a^2$ y $2a$ **no son** semejantes

Operaciones con monomios.

Suma de monomios: Para sumar dos monomios con la misma parte literal, se mantiene ésta y se suman los coeficientes.

$$ax^b y^d + cx^b y^d = (a+c)x^b y^d$$

Resta de monomios: Para restar dos monomios con idéntica parte literal, mantenemos la parte literal y restamos los coeficientes.

$$ax^b y^d - cx^b y^d = (a-c)x^b y^d$$

Producto de monomios: Se multiplican los coeficientes y se suman los exponentes de los elementos con la misma base.

$$3x^2yz^3 \cdot 4x^3y^6z^5 = 12x^5y^7z^8$$

Cociente de dos monomios: El cociente de dos monomios, sólo será un monomio cuando la parte literal del dividendo sea múltiplo de la parte literal del divisor.

Ejemplos

$7x^2y/2xy = (7/2)x$ sí es un monomio porque: x^2y es múltiplo de xy ;

$7x^2y/2xyz = 7x/2z$ es un monomio porque: x^2y no es múltiplo de xyz .

Polinomios

Se denomina así a la suma de varios monomios no semejantes, llamados términos del polinomio. Es una expresión algebraica constituida por una o más variables, utilizando solamente operaciones de adición, sustracción, multiplicación y exponentes numéricos positivos. El polinomio de un sólo término se denomina monomio, el de dos binomio, el de tres trinomio.

La expresión general de los polinomios que sólo tienen una variable, los más utilizados, es:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n$$

Por ejemplo: $7x^5 + 9x^4 - 14x^2 + 6x - 12$

Se denomina *grado de un polinomio* al mayor de los grados de los monomios que lo componen.

Operaciones con polinomios

Valor numérico de un polinomio

Partiendo de un polinomio P(x), el cálculo del valor numérico que ese polinomio toma para un valor concreto de x, x= b, se obtiene sustituyendo la variable x del polinomio por el valor b y se realizan las operaciones. El resultado de P(b) es valor numérico del polinomio para x= b.

En el caso general: $P(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + \ldots + a_nx^n$ tomará un valor para x = b, de:

$$P(b) = a_0b^0 + a_1b^1 + \ldots + a_nb^n$$

Ejemplo: Dado el polinomio: $P(x) = 3x^2 - 4x + 5$, su valor para x= 2, sustituyendo x

$$P(2) = 3\ 2^2 - 4\ 2 + 5$$

por su valor, tenemos:

Con el resultado de: $P(2) = 9$

Igualdad de polinomios

Dos polinomios son iguales cuando lo son sus monomios semejantes.

Dados dos polinomios: $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $Q(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$ de grado n, se dice que son iguales si los coeficientes de los monomios de igual grado son iguales, esto es, si: $\forall_{i=1}^{n} a_i = b_i$

Se leen:	$\forall_{i=1}^{n} a_i = b_i$: "Para todo a_i en donde i va de **1** a **n**, es igual a b_i"
	$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$: "El Polinomio en x es igual a la sumatoria de a_i por x^i donde i va de **0** a **n**"

Ejemplo: $P(x) = 5x^3 - x^2 + 5x - 4$, $Q(x) = 5x + 5x^3 - 4 - x^2$

en este caso: $P(x) = Q(x)$

Polinomio opuesto

Dados dos polinomios: $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$,$Q(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$ de grado n, se dice que son opuestos.

Y se representa: $P(x) = -Q(x)$

Si los coeficientes de los monomios de igual grado son de distinto signo (opuestos), esto es:

$$\forall_{i=1}^{n} a_i = -b_i$$

Ejemplo:

$$P(x) = -3x^4 + 5x^3 - 10x^2 + 2,3x - 6 \ , \ Q(x) = +3x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 2,3x + 6$$

Los polinomios P(x) y Q(x) son opuestos.

Adición de polinomios

La suma de polinomios es una operación, en la que partiendo de dos polinomios P(x) y Q(x), obtenemos un tercero R(x), tal que, R(x) tiene por coeficiente de cada monomio el de la suma de los coeficientes de los monomios de P(x) y Q(x) del mismo grado.

Dados los dos polinomios P(x) y Q(x): $P(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $Q(x)=\sum_{i=0}^{n} b_i x^i$, el polinomio suma R(x), será:

$$R(x)=P(x)+Q(x)$$

Que es lo mismo que: $R(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i+\sum_{i=0}^{n} b_i x^i$

Ejemplo:

Escribiendo los polinomios de modo que los monomios de igual grado estén alineados verticalmente, la suma de los polinomios es el polinomio resultante de sumar las coeficientes de los monomios del mismo grado, como se ve en el ejemplo.

$$\begin{array}{r} 3x^6 -2x^5 +8x^4 +8x^3 -3x^2 +7x +1 \\ + \quad 4x^5 +x^4 +9x^3 -12x^2 +6x -5 \\ \hline 3x^6 +2x^5 +9x^4 +17x^3 -15x^2 +13x -4 \end{array}$$

Producto de polinomios

Producto de un polinomio por un monomio

Partiendo de un polinomio P(x), y un monomio M(x), el producto P(x)*M(x) es un polinomio que resulta de multiplicar los coeficientes del polinomio por el del monomio, y sumar a los grados de los del polinomio el del monomio, veamos: Si el polinomio es:

$$P(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i\, x^i$$

Y el monomio es: $M(x)=b\,x^j$

El producto del polinomio por el monomio es: $P(x)\cdot M(x)=\sum_{i=0}^{n}(a_i\, x^i)\cdot b\, x^j$

Agrupando términos: $P(x)\cdot M(x)=\sum_{i=0}^{n}(a_i\cdot b)\,(x^i\cdot x^j)$

El producto de exponentes de la misma base, es la base elevada a la suma de los exponentes:

$P(x)\cdot M(x)=\sum_{i=0}^{n}(a_i\cdot b)\, x^{i+j}$ Que es el resultado del producto.

Ejemplo:

Partiendo del polinomio: $P(x) = 5x^5 + 7x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 8x + 4$ y del monomio: $M(x) = 3x^2$

La multiplicación es: $P(x) \cdot M(x) = (5x^5 + 7x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 8x + 4) \cdot 3x^2$

Aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación:

$$P(x) \cdot M(x) = (5 \cdot 3)\, x^5 \cdot x^2 + (7 \cdot 3)\, x^4 \cdot x^2 + (-5 \cdot 3)\, x^3 \cdot x^2 + (3 \cdot 3)\, x^2 \cdot x^2 + (-8 \cdot 3)\, x \cdot x^2 + (4 \cdot 3) \cdot x^2$$

Realizando las operaciones: $P(x) \cdot M(x) = 15x^7 + 21x^6 - 15x^5 + 9x^4 - 24x^3 + 12x^2$

Producto de dos polinomios

Dados dos polinomios P(x) de grado “n” y Q(x) de grado “m”, el producto de estos dos polinomios P(x) * Q(x) que será un polinomio de grado n + m, así si:

$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $Q(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ entonces: $P(x) \cdot Q(x) = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{m} b_j x^j\right)$

Aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación: $P(x) \cdot Q(x) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} (a_i x^i) \cdot (b_j x^j)$

Agrupando términos: $P(x) \cdot Q(x) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_i b_j x^i x^j$

Operando potencias de la misma base: $P(x) \cdot Q(x) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_i b_j x^{i+j}$

Ejemplo:

Vamos a multiplicar los polinomios: $P(x) = -2x^3 + 5x^2 + 6x - 3$, $Q(x) = 3x^2 + x - 4$

El producto de los polinomios P(x) * Q(x), lo realizaremos paso a paso, multiplicando P(x) por cada uno de los monomios de Q(X), sumando después el resultado, así en primer lugar haremos la multiplicación:

$$P(x) \cdot (-4) = (-2x^3 + 5x^2 + 6x - 3) \cdot (-4)$$

Que resulta:

$$\begin{array}{rrrrr} & -2x^3 & +5x^2 & +6x & -3 \\ \times & & +3x^2 & +x & -4 \\ \hline & 8x^3 & -20x^2 & -24x & +12 \end{array}$$

Ahora multiplicamos P(x) por el segundo monomio de Q(x), x: $P(x) \cdot x = (-2x^3 + 5x^2 + 6x - 3) \cdot x$

Al realizar la operación se colocan los resultados alineados verticalmente según las potencias de x, del siguiente modo:

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
 & & & -2\,x^3 & +5\,x^2 & +6\,x & -3 \\
\times & & & & +3\,x^2 & +x & -4 \\ \cline{4-7}
 & & & 8\,x^3 & -20\,x^2 & -24\,x & +12 \\
 & & -2\,x^4 & +5\,x^3 & +6\,x^2 & -3\,x &
\end{array}
$$

Hacemos lo mismo con el tercer monomio de Q(x): $P(x)\cdot 3\,x^2 = (-2\,x^3 + 5\,x^2 + 6\,x - 3)\cdot 3\,x^2$

Lo que resulta:

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
 & & & -2\,x^3 & +5\,x^2 & +6\,x & -3 \\
\times & & & & +3\,x^2 & +x & -4 \\ \cline{4-7}
 & & & 8\,x^3 & -20\,x^2 & -24\,x & +12 \\
 & & -2\,x^4 & +5\,x^3 & +6\,x^2 & -3\,x & \\
 & -6\,x^5 & +15\,x^4 & +18\,x^3 & -9\,x^2 & &
\end{array}
$$

Hechas ya las multiplicaciones de P(x) por cada uno de los monomios de Q(x), hacemos la suma de los productos parciales, según las distintas potencias de x, con lo que obtenemos el resultado:

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
 & & & -2\,x^3 & +5\,x^2 & +6\,x & -3 \\
\times & & & & +3\,x^2 & +x & -4 \\ \cline{4-7}
 & & & 8\,x^3 & -20\,x^2 & -24\,x & +12 \\
 & & -2\,x^4 & +5\,x^3 & +6\,x^2 & -3\,x & \\
 & -6\,x^5 & +15\,x^4 & +18\,x^3 & -9\,x^2 & & \\ \cline{2-7}
 & -6\,x^5 & +13\,x^4 & +31\,x^3 & -23\,x^2 & -27\,x & +12
\end{array}
$$

Este polinomio de 5º grado es el producto de P(x) de 3º grado y Q(x) de 2º grado.

División de polinomios

La división de polinomios tiene la mismas partes que la división aritmética, así hay dos polinomios P(x) (dividendo) y Q(x) (divisor) de modo que el grado de P(x) sea mayor que el grado de Q(x) y el grado de Q(x) sea mayor o igual a cero, siempre hallaremos dos polinomios C(x) (cociente) y R(x) (resto) que podemos representar:

$$
\begin{array}{l|l}
P(x) & Q(x) \\ \cline{2-2}
R(x) & C(x)
\end{array}
$$

$P(x) = Q(x)\cdot C(x) + R(x)$ → **dividendo = divisor × cociente + resto**

El grado de C(x) está determinado por la diferencia entre los grados de P(x) y Q(x), mientras que el grado de R(x) será, como máximo, un grado menor que Q(x).

Ejemplo: $P(x) = 3\,x^4 - 2\,x^3 + 4\,x^2 + 2\,x - 3\,,\ Q(x) = x^2 - 2\,x - 1$

Como resultado de la división finalizada:

$$
\begin{array}{rrrrr|lll}
3x^4 & -2x^3 & +4x^2 & +2x & -3 & x^2 & -2x & -1 \\
\cline{6-8}
-3x^4 & +6x^3 & +3x^2 & & & 3x^2 & +4x & +15 \\
\cline{1-3}
 & 4x^3 & +7x^2 & +2x & -3 & & & \\
 & -4x^3 & +8x^2 & +4x & & & & \\
\cline{2-4}
 & & 15x^2 & +6x & -3 & & & \\
 & & -15x^2 & +30x & +15 & & & \\
\cline{3-5}
 & & & 36x & +12 & & &
\end{array}
$$

Regla de Ruffini

Paolo Ruffini (1765, 1822) fue el matemático italiano, que estableció un método más breve para hacer la división de polinomios, cuando el divisor es un binomio de la forma (x +/- a).

Para explicar los pasos a aplicar en la **regla de Ruffini** vamos a tomar de ejemplo la división:

$(x^4 - 3x^2 + 2) : (x - 3)$

1.- Si el polinomio no está completo, lo completamos añadiendo los términos que faltan con ceros, en forma ordenada, decrecientemente, según los exponentes.

2.- Colocamos los coeficientes del dividendo en una línea.

3.- Abajo a la izquierda colocamos el opuesto del término independiente del divisor.

4.- Trazamos una raya y bajamos el primer coeficiente.

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\
3 & & & & & \\
\hline
 & 1 & & & &
\end{array}
$$

5.- Multiplicamos ese coeficiente por el divisor y lo colocamos debajo del siguiente término.

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\
3 & & 3 & & & \\
\hline
 & 1 & & & &
\end{array}
$$

6.- Sumamos los dos coeficientes.

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\
3 & & 3 & & & \\
\hline
 & 1 & 3 & & &
\end{array}
$$

7.- Repetimos el proceso anterior.

	1	0	-3	0	2
3		3	9		
	1	3	6		

Volvemos a repetir el proceso.

	1	0	-3	0	2
3		3	9	18	
	1	3	6	18	

Volvemos a repetir.

	1	0	-3	0	2
3		3	9	18	54
	1	3	6	18	56

8.- El último número obtenido**,** 56**,** es el resto**.**

9.- El cociente es un polinomio de grado inferior en una unidad al dividendo y cuyos coeficientes son los que hemos obtenido.

$$\mathbf{x^3 + 3\,x^2 + 6x + 18}$$

Ejemplo: Dividir por la regla de Ruffini:

$\mathbf{(x^5 - 32) : (x - 2)}$

	1	0	0	0	0	-32
2		2	4	8	16	32
	1	2	4	8	16	0

C(x) = $x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16$, R = 0

Teorema Del Resto

El resto *R* de la división de un polinomio *P*(*x*) por un binomio de forma (*x* + *a*) es el valor numérico del polinomio dividendo, sustituyendo "x" por el opuesto de "a" (es decir, por − *a*). Formalmente puede expresarse como:

$$R = P(-a)$$

Por ejemplo, si $P(x) = 3x^4 - 5x^2 + 3x - 20$

Para x = 2 se obtiene el resto: $P(2) = 3 \times 16 - 5 \times 4 + 3 \times 2 - 20 = 14$

Cuando el resto sea igual a cero diremos que el dividendo es divisible por el divisor, es decir, que la división es exacta.

Factorización de un polinomio: transformación en producto de polinomios de igual o menor grado que el dado

Se dice que un número a es raíz de un polinomio P(x) si *P*(*a*) = 0, es decir, si el valor numérico del polinomio para *x* = *a* es cero. Se suele decir, también, que el polinomio P(x) se anula para x = a.

Por el teorema del resto, si "a" es una raíz del polinomio P(x), entonces P(x) es divisible por x - a, pues el resto de dividir P(x) entre x – aes cero. A cada uno de esos valores se los suele designar x_1, x_2, x_3, etc.

→ $P(x) = a_0x^n - a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ $\quad P(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$

Habitualmente, para reconocer las raíces enteras de un polinomio con coeficientes enteros se tiene en cuenta que éstas han de ser divisores del término independiente. Así, las raíces enteras del polinomio

$$P(x) = x^4 - 6x^3 + 4x - 12$$

Están entre los divisores de 12. Por tanto, pueden ser raíces de P(x) los números 1, –1, 2, –2, 3, –3, 4, –4, 6,– 6, 12 y – 12.

Para descomponerlo en factores se prueba sucesivamente por todas ellas aplicando la regla de Ruffini. Para no trabajar de más se aplica el teorema del resto verificando cuál de estos valores da como resto cero.

$$P(x) = x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 4x - 12$$

$$P(1) = 1^4 - 6 \times 1^3 + 9 \times 1^2 + 4 \times 1 - 12$$

Puesto que el resto, – 4, es distinto de 0, se concluye que P(x) no es divisible por x – 1, o lo que es lo mismo, 1 no es raíz de P(x). Probando con –1:

$$P(-1) = (-1)^4 - 6 \times (-1)^3 + 9 \times (-1)^2 + 4 \times (-1) - 12$$

–1 es raíz de P(x), es decir, P(x) es divisible por x + 1: $P(x) = (x+1)(x^3 - 7x^2 + 16x - 12)$

Para hallar más raíces de P(x), se obtienen las raíces de $P_1(x) = (x^3 - 7x^2 + 16x - 12)$

Se prueba de nuevo con – 1: $P_1(-1) = (-1)^3 - 7(-1)^2 + 16(-1) - 12$

1 no es raíz de $P_1(x)$. Probando con 2: $P_1(2) = 2^3 - 72^2 + 16 \times 2 - 12$

2 es raíz de $P_1(x)$ y, por tanto, de P(x): $P(x) = (x+1)(x-2)(x^2 - 5x + 6)$

Apliquemos cuadrática

$$P(x) = (x+1)(x-2)(x-2)(x-3)$$

2 es nuevamente raíz de P(x). Es una raíz doble. Ahora ya se ha conseguido la factorización completa de P(x):

$$P(x) = (x+1)(x-2)^2(x-3)$$

Ejercicios con polinomios

1) dados los polinomios: $A = -8x^3 + 5x^2 + 2x$ $\quad C = \frac{1}{2}x - x^2$

$B = x^5 + 7x^3 - 4x^2 + x$ $\quad D = 3x - 1$

Se pide:

- resuelve las siguientes adiciones y sustracciones:

a) A + B =

b) B + C =

c) A – D =

d) A + C =

e) A – B =

f) A - (B + C) =

- resuelve las siguientes multiplicaciones:

a) A. $3x =$

b) B. $\frac{1}{5}X^2$ =

c) D. $(-\frac{1}{6}x^3)$

d) A . C =

e) C . D =

f) D por su conjugado

g) C . $(\frac{1}{2}x + x^2)$ =

- efectúa las siguientes divisiones:

a) A : $(2x^2)$ = b) B : $(\frac{1}{3}x)$ = c) A : $(x – 2)$ = d) B : $(D.\frac{1}{3})$=

e) (A+B) : $(x + 1)$ = f) A : (2 . C) = g) A : D =

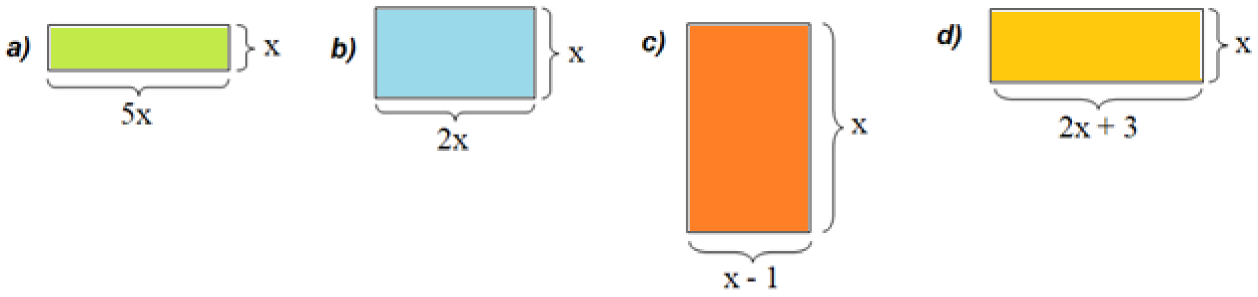
2) calcula las siguientes potencias:

a) $(5x^4)^2 =$ b) $\left(\frac{-1}{2}x^3\right)^4 =$ c) $\left[A-2x^2+8x^3\right]^2 =$

d) $D^2 =$ e) $C^2 =$

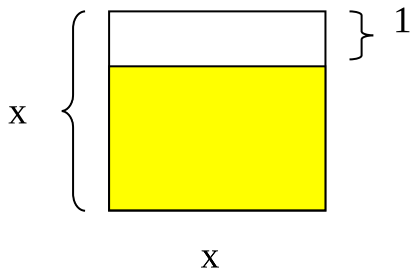
Combinamos las operaciones

1) escribe en cada caso, la expresión del perímetro y del área:



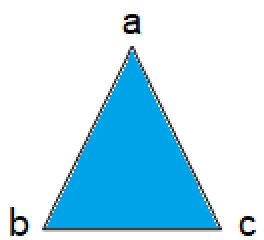
2) Si en el ejercicio anterior x = 5 ¿Cuál es el valor del perímetro y del área en cada rectángulo?

3) Halla la expresión del perímetro y del área de la figura sombreada



4) El triángulo de la figura es isósceles, su perímetro esta dado por la expresión: $p = 4x^2 - 1$ y el $ab = x^2 - 1$; calcula:

a) la expresión del segmento ac.
b) el valor de cada lado y del perímetro si $x = \sqrt{2}$



5) Verifica si los polinomios P (x) = $(x+2)(x^2-2x+4)$ y Q(x)= $(x^2+2)(x+4)-2x.(2x+1)$ son idénticos.

6) Dados lo polinomios:

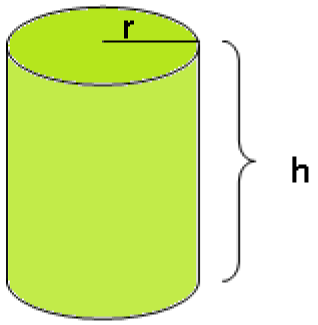
P(x)= $2x^2-x$ Q (x) = $\frac{-1}{3}x^3+x-2$ R(x) = x - $\frac{1}{2}$

Debes calcular:

a) $[P(x)]^2 =$ b) Q (x) . R(x) - $[P(x)]^2 =$ c) P(x) – $[R(x)]^2 =$

d) P(x) . R(x) – Q(x) =   e) Q (x) : (x+3) =   f) Q : R =

7) Calcula el volumen del cilindro si r = 2x -1 y h = x^2 + 3



8) Resuelve las siguientes divisiones, si es posible aplica la regla de Ruffini:

a) $(4x^4-2x^3-4x^2+3x-3):(2x^2-3)=$ b) $(2x^4-5x^3-2x+4):(x^3+x+1)=$

c) $(x^4-2x^2+3):(x-1)=$ d) $(8x^3-3x+x^4+12x^2+20):(x+3)=$

9) Determina p y q tal que px^3+qx^2+3 sea divisible por (x+1)

10) En la primera columna, marca con una cruz todas las afirmaciones verdaderas, luego indica la respuesta correcta de las que resultaren falsas, si

P = x^2-4x+4 ; Q = 2x-4

	AFIRMACION	VERDADERA	RESPUESTA CORRECTA
a	**$P + Q = x^2 - 2x$**		
b	**$P - 2Q = x - 8x + 12$**		
c	**$3.P \,.\, Q = 6\,(x - 2)$**		
d	**$P : Q = x - 2$**		
e	**$Q = 4\,(X-2)$**		
f	**$P(-3) \neq -25$**		
g	**La raíz de Q es 2**		
h	**Las raíces de P son: $x = 2$; $x = -2$**		

Páginas WEB recomendadas por los autores:

Generales y operaciones básicas con resolución:
https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/algebra/polinomios/ejercicios-y-problemas-de-polinomios.html

De suma y resta de polinomios, con resolución:
https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/algebra/polinomios/ejercicios-interactivos-de-suma-de-polinomios.html

De producto de polinomios, con resolución:
https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/algebra/polinomios/multiplicacion-de-polinomios.html

De cociente de polinomios, con resolución:
https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/algebra/polinomios/ejercicios-interactivos-de-division-de-polinomios.html

CLASE Nº 4

Factoreo

Factorear un polinomio es transformarlo en un producto de otras expresiones de menor o igual grado. El proceso se puede estudiar en un grupo de casos.

Casos de factoreo

Factor común

El FACTOR COMUN es un número, una letra, o un número y una letra que aparece en todos los términos del polinomio.
Luego de deducirlo se DIVIDE cada término por el factor común y el resultado se anota dentro de un paréntesis.

Procedimiento:

1° Paso: Buscamos el *factor común* (que debe ser el mayor posible)
2° Paso: Se expresa el *polinomio dado* como el producto del factor común por el polinomio que resulta de dividir el polinomio dado por el factor común.

Ejemplo:

$$4a^2b+2ab^2 \Rightarrow \text{Factor común} \Rightarrow 2ab(2a+b)$$

Factor común por grupos

Se aplica en polinomios que no tienen factor común en todos sus términos.

Procedimiento:

1° Paso: Se forman grupos de igual cantidad de términos que tengan factor común, se sustrae dicho factor común en cada uno de los grupos.

2° Paso: Debe quedar un paréntesis común.

3° Paso: Se extrae dicho paréntesis como factor común.

Ejemplo:

$$2xy^2a+mb+2xy^2b+ma \Rightarrow \text{Agrupo} \Rightarrow (2xy^2a+ma)+(mb+2xy^2b)$$

$$\text{Factor Común} \Rightarrow a(2xy^2+m)+b(m+2xy^2)$$

$$\text{Factor Común} \Rightarrow \boxed{(2xy^2+m)(a+b)} \quad \text{Factor Común por Grupos}$$

Trinomio cuadrado perfecto

Recordar: Cuadrado de un Binomio

Procedimiento:

1°Paso: Se reconocen los cuadrados perfectos, los cuales no deben tener un signo negativo adelante. Calculo sus raíces cuadradas, dichas raíces serán las bases.

2° Paso: Luego calculo el doble producto de sus bases; y luego nos fijamos si se verifica que el doble producto figura en el trinomio dado.
3° Paso: Si el doble producto figura en el trinomio dado, entonces decimos que es un Trinomio Cuadrado Perfecto; y luego lo factorizo como el cuadrado de un binomio, formado por dichas bases.

Observaciones muy importantes:

Si el doble producto que figura en el *Trinomio dado* es positivo, entonces las bases del Cuadrado del Binomio tendrán las dos el mismo signo.

Si el doble producto que figura en el *Trinomio dado* es negativo, entonces las bases del Cuadrado del Binomio tendrán signos opuestos.

Ejemplos

1.- $4x^2+12xz+9z^2$

$\sqrt{4x^2}=2x$ **(posible término de la base)**

$\sqrt{9z^2}=3z$ **(posible término de la base)**

$2.2x.3z=12xz$ **Es un Trinomio Cuadrado Perfecto**

Entonces: $4x^2+12xz+9z^2=(2x+3z)^2 \, o (-2x-3z)^2$

2.- $4x^6+\frac{1}{16}+x^3$

$\sqrt{4x^6}=2x^3$

$\sqrt{\frac{1}{16}}=\frac{1}{4}$

$2.2x^3.\frac{1}{4}=x^3$ $\Rightarrow$ **Es un Trinomio Cuadrado Perfecto**

Entonces: $4x^6+\frac{1}{16}+x^3=(2x^3+\frac{1}{4})^2$ o $(-2x^3-\frac{1}{4})^2$

Cuatrinomio Cubo Perfecto

Recordar: Cubo de un Binomio

Procedimiento:

1°Paso: Se reconocen los cubos perfectos. Y calculo sus raíces cúbicas, dichas raíces serán las bases.

2° Paso: calculo el triple producto del cuadrado de la primera base por la segunda, el triple producto de la primera base por el cuadrado de la segunda
Luego nos fijamos si estos cálculos figuran en el cuatrinomio dado.

3° Paso: Si estos cálculos figuran en el trinomio dado, entonces decimos que es un Cuatrinomio Cubo Perfecto; y luego lo factorizo como el cubo de un binomio, formado por dichas bases.

Observación muy importante: Las bases que figuran en el Cubo del Binomio, van a conservar su signo.

Ejemplos:

1.- $8a^3 + 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3$

$\sqrt[3]{8a^3} = 2a$

$\sqrt[3]{-27b^3} = -3b$

$3(2a)^2.(-3b) = -36a^2b$

$3(2a).(-3b)^2 = 54ab^2$

Es un Cuatriniomio Cubo Perfecto

Entonces: $8a^3 + 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3 = (2a - 3b)^3$

2.- $\frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - 1$

$\sqrt[3]{\frac{1}{8}x^3} = \frac{1}{2}x$

$\sqrt[3]{-1} = -1$

$3(\frac{1}{2})^2.(-1) = -\frac{3}{4}x^2$

$3.\frac{1}{2}x.(-1)^2 = \frac{3}{2}x$

Es un Cuatriniomio Cubo Perfecto

Entonces: $\frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - 1 = (\frac{1}{2}x - 1)^3$

Diferencia de cuadrados

Recordar: Producto de Binomios Conjugados

Procedimiento:

1° Paso: Debo identificar la resta (debe haber un solo signo negativo) y luego los cuadrados perfectos.

2° Paso: Calculo las bases de los cuadrados perfectos (haciendo la raíz cuadrada de cada uno)

3° Paso: Transformo la diferencia de cuadrados en un producto de binomios conjugados, formado por dichas bases.

Ejemplos:

1.- $9x^2 - 25y^2$

$\sqrt{9x^2} = 3x$

$\sqrt{25y^2} = 5y$

Entonces: $9x^2 - 25y^2 = (3x+5y)(3x-5y)$

2.- $\frac{4}{9}x^6 - z^4y^2$

$\sqrt{\frac{4}{9}x^6} = \frac{2}{3}x^3$

$\sqrt{z^4y^2} = z^2y$

Entonces: $\frac{4}{9}x^6 - z^4y^2 = \frac{2}{3}x^3 + z^2y \quad \frac{2}{3}x^3 - z^2y$

Suma o diferencia de potencias de igual grado

La suma de potencias de igual grado de exponente impar es divisible únicamente por la suma de sus bases.

$$(x^3 + a^3) : (x + a) = (x^2 - ax + a^2)$$

Como se trata de una división exacta, el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente. Luego:

$(x^3 + a^3) = (x + a). (x^2 - ax + a^2)$

La diferencia de potencias de igual grado de exponente impar es igual al producto de la diferencia de las bases por el cociente de dividir la primera diferencia por la segunda

$$(m^3 - 27 n^3) : (m - 3 n) = (m^2 + 3mn + 9 n^2)$$

La diferencia de potencias de igual grado de exponente par, es divisible por la suma y la diferencia de sus bases

$(x^6 - y^6) : (x + y) =$

$(x + y).(x^5 - x^4y + x^3y^2 - x^2y^3 + xy^4 - y^5)$

$(x^6 - y^6) : (x - y) = (x - y).(x^5 + x^4y + x^3y^2 + x^2y^3 + xy^4 + y^5)$

La suma de potencias de igual grado de exponente par no se puede factorear.

Divisibilidad

Este caso consiste en hallar los divisores del polinomio dado. Esto lo efectuamos mediante la siguiente propiedad.
Si un número a es raíz de un polinomio P(x), dicho polinomio es divisible por (x−a), es decir que, al dividir P(x) por (x−a), el resto de la división es cero

Por el teorema del resto tenemos que: P(a)=0

En símbolos: $\dfrac{P(x)}{(x-a)} = C(x) \rightarrow \boxed{P(x) = (x-a) \cdot C(x)}$

Cálculo de las raíces de un polinomio

Para calcular las raíces de un polinomio en el cual figura una sola incógnita, elevada a una potencia, podemos calcular su raíz igualando a cero y resolviendo esa ecuación.

Cuando tenemos un polinomio de grado dos, donde aparece la incógnita dos veces (una elevada al cuadrado y otra con exponente 1, podemos calcular sus raíces aplicando la resolvente.

En este caso hay que tener en cuenta que los alumnos ya saben factorizar un polinomio de este tipo.

Entonces:

Si $P(x) = ax^2 + bx + c$, y sean x_1, x_2 raices de $P(x)$
entonces podemos escribir a $P(x)$ como:
$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

Ahora si nos encontramos con un polinomio de grado mayor que dos, y la incógnita aparece más de una vez, podemos calcular sus raíces mediante el Teorema de Gauss, que si bien nonos asegura exactamente cuáles son sus raíces, nos da un número finito de raíces posibles.

Teorema de Gauss

Este teorema nos parece conveniente explicarlo a través de un ejemplo, ya que el teorema enunciado en forma general nos parece demasiado complicado para que los alumnos puedan entenderlo.

Si tenemos por ejemplo $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x - 3$

Divisores del Término independiente (- 3): 1, 3

Divisores del coeficiente principal (2): 1, 2

Entonces las posibles raices o ceros de P(x) son:

$$x_1 = 1,\ x_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = 3,\ x_4 = \frac{3}{2}$$

Ahora debemos verificar cuáles son las raíces o ceros de P(x)

$P(-1) = 2.(-1)^3 - 3.(-1)^2 - 8.(-1) - 3 = 0$ por lo tanto $x_1 = -1$ es raíz

$P\left(-\frac{1}{2}\right) = 2.\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 3.\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 8.\left(-\frac{1}{2}\right) - 3 = 0$ por lo tanto $x_2 = -\frac{1}{2}$ es raíz

$P(3) = 2.3^3 - 3.3^2 - 8.3 - 3 = 0$ por lo tanto $x_3 = 3$ es raíz

Entonces podemos escribir a P(x) como: $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x - 3 = 2(x+1)(x+\frac{1}{2})(x-3)$

Ejemplos de Gauss

Factoriza la siguiente expresión

Ejemplo 1:

$P(x) = x^3 - 64$ Calculo una raiz de P(x)

$x^3 - 64 = 0 \Rightarrow x^3 = 64 \Rightarrow x = \sqrt[3]{64}$

$x = 4$ Raiz de P(x) Entonces: $x^3 = 64$ es divisible por $(x-4)$

es decir $x^3 - 64 = (x-4) \cdot C(x)$

$C(x)$ es el cociente de dividir $x^3 - 64$ por $(x-4)$

Aplico Ruffini para calcular $C(x)$

$x^3 + 0x^2 + 0x - 64$

	1	0	0	-64
4		4	16	64
	1	4	16	0

$C(x) = x^2 + 4x + 16$

$R(x) = 0$

Entonces: $x^3 - 64 = (x-4)\cdot(x^2 + 4x + 16)$

Ejemplo 2: Una forma de resolverlo:

$$-4x^3-2x^2+4x+2$$

Factor Comun (2)

$$2(-2x^3-x^2+2x+1)$$

Factor comun por grupos

$$2\left[-x^2(2x+1)+(2x+1)\right]$$

$$2(2x+1)(-x^2+1)$$

Diferencia de cuadrados

$$2(2x+1)(x+1)(x-1)$$

Otra forma de resolverlo:

Divisibilidad (calculos)

$$-2x^3-x^2+2x+1$$

T.Gauss Posibles Raices: $\pm 1,\ \pm\frac{1}{2}$

$$-2(-1)^3-(-1)^2+2(-1)+1=0$$

(-1) es raiz

$-2x^3-x^2+2x+1$ es divisible por $(x+1)$,

es decir $-2x^3-x^2+2x+1=(x+1)C(x)$

$C(x)$ es el cociente de dividir $-2x^3-x^2+2x+1$ por $(x+1)$

Aplico Ruffini para calcular $C(x)$

$$-2x^3-x^2+2x+1$$

$$\begin{array}{c|cccc} & -2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & & 2 & -1 & -1 \\ \hline & -2 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$C(x)=-2x^2+x+1$

$R(x)=0$

Entonces: $-2x^3-x^2+2x+1\ =(x+1)(-2x^2+x+1)$

Resolvente: $-2x^2+x+1$

$$x_{1,2}=\frac{-1\quad\sqrt{1^2-4.(-2).1}}{2.(-2)}$$

$$x_{1,2}=\frac{-1\quad\sqrt{9}}{-4}\qquad x_1=\frac{1}{2},x_2=1$$

$$-2x^2+x+1=-2\ \ x-\frac{1}{2}\ (x-1)$$

Para recordar!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

En el momento de factorizar una expresión debemos tener en cuenta que:

Primero nos fijamos si hay factor común en todos los términos, en caso de haber, lo extraemos. Luego Consideramos la cantidad de términos:

Si hay *dos términos* puede ser que sea Diferencia de Cuadrados o puede ser que podamos utilizar el caso Divisibilidad.

Si hay *tres términos* puede ser Trinomio Cuadrado Perfecto o puede ser que podamos aplicar Divisibilidad

Si hay *cuatro términos* puede ser que sea un Cuatrinomio Cubo Perfecto, podemos intentar Factor Común por Grupos o utilizar Divisibilidad.

Ejercicios

Factor común

1) $15a^2b^3 + 5a^2b^2 - 25a^4b^3 + 10a^5b^5y$

2) $4x^2 + 16\,x^7 - 28\,x^5$

3) $18a^2b + 9/2\,abc - 27ab^4$

4) $7/3a^6b^3c + 7\,a^5xb^2 + 14/5\,a^2x^3bc$

5) $0{,}16a^2b^2 + 2/5\,a^4b^3 - 0{,}32a^5b^5$

6) $250.a^4.b^5.c^5 - 35.a^5.b^3.c^4.x^3 + 15.a^3.b^2.c^4 - 340.a^4.b^2.c^8.x - 65.a^3.b^2.c^5$

7) $100.a^2.x^3.y + 4.a^5.x^2.y^3 - 8.a^4.x^6 - 20.a.x^4$

8) $18.m^6.p^4.q^2 - 9.m^5.p^2.q.x + 27.m^7.p^3.q.x + 90.m^4.p^2.q - 63.m^5.p^4.q.x^2.y$

9) $3.n^6.s^4.t^2 - 4.n^5.s^2.t.u + 18.n^7.s^3.t.u + 90.n^4.s^2.t - 30.n^5.s^4.t.u^2.v$

Factor común en grupos

1) $2ax + 2bx - ay + 5a - by + 5b$ **Rta** $(a + x) . 2 (x - y + 5)$

2) $15\,a^2 - 3\,am - 3/2\,a - 5ax + xm + 1/2x$ **Rta** $(3a - x) . (5a - m - 1/2)$

3) $9\,a^2x - 3ax^2 + 15a - 5x + 6\,am - 2mx$ **Rta** $(3a - x) .(2ax + 5 + 2m)$

4) $6\,b^6 - 2\,b^5x^2 + 2/3b^4x^3 - 5/3\,x^7 + 5bx^6 - 15b^2x^4$ **Rta** $(2b^4 - 5x^4)(3b^2 - bx^2 + 1/3x^3)$

5) $16\,amx - 8amy + 2x - y$ **Rta** $(8\,am + 1) . (2x - y)$

6) $2.l.x + 2.b.x + 5.l - l.y - b.y + 5.b$

7) $a^2.d + a.m^2 - a.x.d - m^2.x$

8) $10.a.m^2.x.z - 15.m^2.x.z + 10.a.x - 15.b.x - 8.a.m^2.o.z + 12.b.m^2.o.z - 8.a.o + 12.b.o$

9) $5.a.u.x/3 + 20.a.u.y - 2.b.u.x/3 - 8.b.u.y - 10.a.n.x/9 - 40.a.n.y/3 + 4.b.n.x/9$

Trinomio Cuadrado Perfecto

1) $a^4 + d^4/4 + a^2.d^2$ 2) $9.p^6/25 + 4.y^2 - 12.p^3.y/5$ 3) $-3.j^2.o^6.n/5 + n^2/4 - 9.j^4.o^{12}$

Cuatrinomio Cubo Perfecto

1) $64.p^6 + 96.p^2.n + 48.p^2.n2 + 8.n^3$

2) $y^3/27 - y^2.a/3 + y.^{a2} - a^3$

3) $0{,}125 - 0{,}75.x.y + 1{,}5.x^2.y^2 - x^3.y^3$

Suma o Diferencia de Potencias de Igual Grado

1) $x^7 + a^7$ 2) $a^3 + 8$ 3) $27 + y^3$ 4) $x^5 + 1/32$ 5) $x^3 - 1/8$

6) $a^4 - b^4.c^4$ 7) $x^3 + 7$ 8) $a^{10} - x^5$ 9) $x^6 - y^6$ 10) $x^6 + y^{12}$

11) $a^7 - 128.x^7$

Factorear, combinando los distintos casos:

1.- $25x^2/9 + 4 - 20x/3$ **2.-** $9x^2/16 + 1/64 - 6x/32$ **3.-** $9 + x^2 - 6x$

4.-$20x + 25 + 4x^2$ **5.-** $9 + 16y^2 + 24y$ **6.-** $1 + 12x + 36x^2$

7.- $64 + x^4/9 - 16x^2/3$ **8.-** $x^6/16 + x^4 - x^5/2$ **9.-** $81 - x^4/4$

10.- $4 + x^2/4 - 2x$ **12.-** $49/4 + x^2 + 7x$ **13.-** $0{,}04 + x^2 - 0{,}4x$

14.- $x^4 + 2x^2y^2 + y^4$ **15.-** $49x^2 + 9y^4 + 42xy^2$ **16.-** $9x^2/y^2 + 1 - 6x/y$

17.- $9x^{12} - 6x^6y^2 + y^4$ **18.-** $36 + 25x^6 - 60x^3$ **19.-** $16z^6 + 1/9 + 8z/3$

20.- $0{,}01x^4 + x^2 + 0{,}2x^3$ **21.-** $y^2 + 7y + 12$ **22.-** $36h^4 + 4 - 24h^2$

23.- $9a^6 + 6a^3b + b^2$ **24.-**$a^2 - 8a + 15$ **25.-** $4x^2y^2 + 49x^2 + 28x^2y$

26.- $z^8 + 64 - 16z^4$ **27.-**$a^3 - m^3$ **28.-** $5x + 25 + x^2/4$

29.- $3x/2 + 9x^2/16 + 1$ **30.-** $9 - 18x + 9x^2$ **31.--** $3y^2 - 1 + 3y + y^3$

32.-$25x^2y^2 + 9z^2 - 30xyz$ **33.-** $2y^3/9 + 1/81 + y^6$|| **34.-** $25x^4 + 9 - 30x^2$

35.- $64x^2y^2 + 9 + 48xy$ **36.-** $-16z + 4 + 16z^2$ **37.-** $0{,}25x^2 - 2x + 4$

38.- $1 + 3z^2/2 + 9z^4/16$ **39.-** $49x^2 + z^8/9 + 14xz^4/3$ **40.-** $1 - 4x^{18}$

41.- $y^2/9 + x^2/4 + xy/3$ **42.-** $36z^8 - 9z^6$ **43.-** $x^2/4 + y^2/9 - xy/3$

44.- $z^2 + 6xz/y + 9x^2/y^2$ **45.-** $1 + 169z^2 + 26z$ **46.-** $225x^2/4 + 144 + 90x$

47.- $9 + 30x^2 + 25x^4$ **48.-** $(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)$ **49.-** $1 - x^{-4}$

50.- $36x^6 - y^2$ **51.-** $x^4y^2 - 4x^2/9$ **52.-** $36 + 25x^2/z^4 - 60x/z^2$

53.- $36x^2/49 - 12xy^2/7 + y^4$ **54.-** $(7 + x^8)(7 - x^8)$ **55.-** $x^4/4 - 4$

56.- $3025 - x^6$ **57.-** $36x^2/z^4 - y^6$ **58.-** $25x^6 - 529$

59.- $36v^{80} - 400$ **60.-** $0{,}04 - t^8$ **61.-** $(a - 1)^2 - 1$

62.- $0{,}09 - u^{32}$ **63.-** $1 - 16xyz + 64x^2y^2z^2$ **64.-** $3ax^2 + ax$

65.- $x^2 + ax - bx - ab$ **66.-** $- z^3 - z^2$ **67.-** $y^2 - az + bz - ab$

68.- $ay - a^2y^2$ **69.-** $1/4x^2 - x^4$ **70.-** $- 2y^2 + 4y - 2$

71.- $72xyz + 81x^2y^2 + 16z^2$ **72.-** $-y^4 + 81$ **73.-** $(x - y)^2 - y$

74.- $64z^2/25 + 1/9 + 16z/15$ **75.-** $64y^{10} + z^2x^2 - 16.z.x.y^5$ **76.-** $- x^2 + b^2$

77.- $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ **78.-** $b^4 + 16b^2 + 64$ **79.-** $x^2/4 + x^2y^2 - x^2y$

Páginas WEB recomendadas por los autores:

Calculadora de FACTOREO DE POLINOMIOS:
https://calculadorasonline.com/calculadora-de-factorizacion-de-polinomios-productos-notables/#soluciones

Ejercicios resueltos:
https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/algebra/polinomios/ejercicios-de-factorizacion-y-raices-de-polinomios.html

Casos combinados. Alto nivel.
https://ehenao.wordpress.com/ejercicios-resueltos/

CLASE Nº 5

Ecuaciones

Expresiones algebraicas

Muchas expresiones algebraicas que utilizaremos resultan de una "traducción" del lenguaje ordinario al lenguaje algebraico. Fíjate en los ejemplos y observa que a los números cuyo valor desconocemos unas veces les hemos dado el nombre de una letra y otras veces el de otra.

(El signo entre número y letra o entre dos letras no es necesario escribirlo y lo sobreentenderemos)

. El doble de un número _ $2n$
. La mitad de un número _ $X/2$
. El triple de un número menos dos _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ $3y - 2$
. El doble del producto de dos números _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ $2ab$

Ejercicios

1.- "Traduce" cada expresión a lenguaje algebraico:

. El triple de un número……………………………………………………..

. El doble de un número menos su mitad………………………………….

. El cuadrado de un número más su triple………………..………………..

. La mitad más la tercera parte más la cuarta parte de un número……..

. La mitad de un número menos el propio número………………………..

. El doble de un número más el triple de otro número…………………….

2.- Llamando x a un número natural cualquiera, escribe la expresión algebraica que resulta de traducir cada uno de los siguientes enunciados:

. Un número 5 unidades mayor……………….…………………………..
. Un número 3 unidades menor……………………..……………………..
. El número natural siguiente…………………….………………………..
. El número natural anterior…………………….………………………….
. El doble del número……………………………………………………….
. El triple del número……………………………………………………….
. El doble del número más cuatro………………………………… ……
. El número más su anterior………………………….…………………….
. La suma de los dos números siguientes a él…………………………….
. La mitad del número más 1………………………………………………..
. El cuadrado del número menos su mitad…………………………………

Ecuaciones polinómicas

1.- Calcula ***k*** para que la ecuación $x^2 - 6x + k = 0$ no tenga soluciones reales

1) $8 - 5\mathbf{x} = 8 + 2\mathbf{x} \Rightarrow$ trasposición $-5\mathbf{x} - 2\mathbf{x} = 8 - 8$
$-7\mathbf{x} = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = 0/7 \Rightarrow \mathbf{x} = 0$

2) $5(\mathbf{x} - 3) + 8\mathbf{x} = 6\mathbf{x} - 5 + \mathbf{x} \Rightarrow 5x - 15 + 8x = 7x - 5$
$13\mathbf{x} - 7\mathbf{x} = -5 + 15 \Rightarrow 6\mathbf{x} = 10 \Rightarrow x = 5/3$

3) $15 - 6(2\mathbf{x} - 4) = 8 + 2(5\mathbf{x} - 1) \Rightarrow 15 - 12\mathbf{x} + 24 = 8 + 10\mathbf{x} - 2$
$-22\mathbf{x} = -33 \Rightarrow \mathbf{x} = 33/22 \Rightarrow \mathbf{x} = 3/2$

4) $2 - (3\mathbf{x} - 5) = 4 - 2\mathbf{x} + 3 - \mathbf{x} \Rightarrow 2 - 3\mathbf{x} + 5 = 7 - 3\mathbf{x} \Rightarrow$
$0\mathbf{x} = 0$ todo número real

5) $3(\mathbf{x} + 4) - 6\mathbf{x} = 8 - 3(\mathbf{x} - 5) \Rightarrow 3\mathbf{x} + 12 - 6\mathbf{x} = 8 - 3\mathbf{x} + 15$
$0\mathbf{x} = 23 - 12 \Rightarrow 0x = 11$ incompatible

6) $\dfrac{x-3}{3} + \dfrac{2\mathbf{x} - 1}{6} = 4 \Rightarrow \dfrac{2(\mathbf{x} - 3) + 2\mathbf{x} - 1}{6} = \dfrac{6 \cdot 4}{6}$
$2x - 6 + 2x - 1 = 24 \Rightarrow 4x = 24 + 7 \Rightarrow x = \dfrac{31}{4}$

7) $\dfrac{x+1}{6} - \dfrac{\mathbf{x}+3}{4} = -1 \Rightarrow \dfrac{2(x+1) - 3(x+3)}{12} = \dfrac{12 \cdot (-1)}{12} \Rightarrow$
$2\mathbf{x} + 2 - 3\mathbf{x} - 9 = -12 \Rightarrow -x = -5 \Rightarrow x = 5$

8) $\dfrac{x-2}{4} - \dfrac{3\mathbf{x} - 1}{8} = \dfrac{\mathbf{x}}{2} \Rightarrow \dfrac{2(x-2) - 3x + 1}{8} = \dfrac{4 \cdot \mathbf{x}}{8} \Rightarrow$
$2x - 4 - 3x + 1 = 4x \Rightarrow -5x = 3 \Rightarrow x = -\dfrac{3}{5}$

9) $\dfrac{x+5}{2} = \dfrac{2\mathbf{x}+3}{3} \Rightarrow \dfrac{3(x+5)}{6} = \dfrac{2(2\mathbf{x}+3)}{6} \Rightarrow$
$3x + 15 = 4x + 6 \Rightarrow 3x - 4x = 6 - 15 \Rightarrow$
$-x = -9 \Rightarrow x = 9$

Otra forma: Producto de extremos igual a producto de medios. Sólo cuando hay un "bloque entero" antes del igual y otro después.
$\dfrac{x+5}{2} = \dfrac{2\mathbf{x}+3}{3} \Rightarrow 3(x+5) = 2(2x+3) \Rightarrow 3x + 15 = 4x + 6$
$\Rightarrow x = 9$

10) $\dfrac{x+1}{2} + 5 = \dfrac{2\mathbf{x} + 5}{3} - \dfrac{\mathbf{x}}{2} \Rightarrow \dfrac{3(x+1) + 5 \cdot 6}{6} = \dfrac{2(2\mathbf{x} + 5) - 3 \cdot \mathbf{x}}{6}$

Ejercicios para resolver:

a) $x - \dfrac{13x}{12} = \dfrac{5x}{18} + \dfrac{13}{12}$ sol: $x = -3$

b) $3x - 4 = 5 + 3\left(\dfrac{x}{5} - 1\right)$ sol: $x = \dfrac{5}{2}$

c) $2 - 4\left(\dfrac{2x}{7} + \dfrac{1}{7}\right) = \dfrac{3}{2} - x$ sol: $x = -\dfrac{1}{2}$

d) $5x - 3\left(3 - \dfrac{x}{4}\right) = \dfrac{7x}{2} - 3$ sol: $x = \dfrac{8}{3}$

e) $5\left(\dfrac{2x}{3} - \dfrac{3x}{5}\right) + 1 = 2x - 2(x - 1)$ sol: $x = 3$

f) $\dfrac{2x}{3} - 4\left(\dfrac{x}{5} - \dfrac{1}{6}\right) = \dfrac{1}{15}$ sol: $x = \dfrac{9}{2}$

g) $1 - \dfrac{2}{3}(x - 3) = 2 - \dfrac{1}{4}(3x - 4)$ sol: $x = 0$

h) $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{x}{2}\right) + \dfrac{1}{9} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{3}\right)$ sol: $x = \dfrac{5}{3}$

i) $\dfrac{2x}{3} - 5\left(\dfrac{x}{12} + \dfrac{1}{4}\right) = 3 - 2\left(1 - \dfrac{x}{6}\right)$ sol: $x = -27$

j) $3\left(\dfrac{11x}{6} - x\right) - 4 = 2x - 3\left(1 - \dfrac{x}{6}\right)$ sol: $x =$ incompatible

k) $\dfrac{1 - 3x}{4} = 2x - 3\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$ sol: $x = 5$

l) $2x - \dfrac{x + 1}{8} = 3 - \dfrac{3x - 1}{4}$ sol: $x = \dfrac{9}{7}$

m) $3x - \dfrac{x-2}{2} = 2\left(2 + \dfrac{x}{4}\right)$ sol: $x = \dfrac{3}{2}$

n) $\dfrac{3x}{4} - 1 = x - \dfrac{1-5x}{2}$ sol: $x = -\dfrac{2}{11}$

ñ) $\dfrac{1-9x}{3} - 2 = \dfrac{x}{3} - \dfrac{11x-1}{2}$ sol: $x = 1$

o) $1 - \dfrac{2x-2}{15} = \dfrac{x}{3} + \dfrac{x-1}{5}$ sol: $x = 2$

p) $x - \dfrac{3-x}{3} = \dfrac{3x}{2} - \dfrac{8-3x}{4}$ sol: $x = \dfrac{12}{11}$

q) $x - \dfrac{x+1}{5} = \dfrac{x+3}{2} - 2$ sol: $x = -1$

Sistemas de ecuaciones.

a) $\begin{cases} x \cdot y = 15 \\ \frac{x}{y} = \frac{5}{3} \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 5x - 5y + 10 = 0 \\ x^2 - y^2 - 5x + 5y + 2 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x^2 - 5y^2 = 7 \\ 2x^2 = 11y^2 - 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} (x+y) \cdot (x-y) = 7 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + 5z = 11 \\ x - 5y + 6z = 29 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 3x - y + z = 1 \\ x + 2y - 2z = -1 \\ 2x - 3y + z = -1 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 3x^2 - 5y^2 = 7 \\ 2x^2 = 11y^2 - 3 \end{cases}$

Inecuaciones.

Resuelve las inecuaciones

a) $\dfrac{x-1}{2} > x-2$

b) $x^2 + 5x < 0$

c) $9x^2 - 4 > 0$

d) $x^2 + 6x + 8 \geq 0$

e) $x^2 - 2x - 15 \leq 0$

f) $x^2 - 7x + 6 \leq 0$

Sistemas de Inecuaciones

a) $\begin{cases} 5 - x < -12 \\ 16 - 2x < 3x - 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 2 > -7 \\ 5 - x < 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x - 3 < 1 \\ x + 6 > 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - 3 > 0 \\ 5x + 1 < 0 \end{cases}$

Páginas WEB recomendadas por los autores:

Sistemas de ecuaciones con dos incógnitas:
https://www.vadenumeros.es/tercero/sistemas-de-ecuaciones.htm

CLASE Nº 6

Relaciones

Función, en matemática, es el término usado para indicar la relación o correspondencia entre dos o más cantidades. El término función fue usado por primera vez en 1637 por el matemático francés René Descartes.

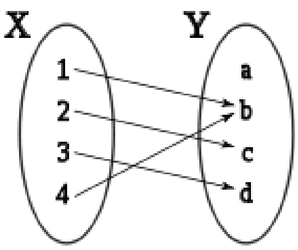
Una variable es un símbolo que representa un número dentro de un conjunto de ellas. Dos variables "x" e "y" están asociadas de tal forma que al asignar un valor a x entonces, por alguna regla o correspondencia, se asigna automáticamente un valor a y, se dice que y es una función (unívoca) de x.

La variable **x**, a la que se asignan libremente valores, se llama **variable independiente**, mientras que la variable **y**, cuyos valores dependen de la **x**, se llama **variable dependiente**.

Una función f de X en Y es una relación que le hace corresponder a cada elemento **x** E X uno y solo un elemento **y** E Y, llamado imagen de **x** por f, que se escribe **y** = f (**x**). En símbolos, f: X à Y

Función

Dados dos conjuntos *X* e *Y*, una **función** de *X en Y* es una correspondencia matemática denotada: $f: X \to Y$



Que cumple con las siguientes dos condiciones:

1. **Condición de existencia:** Todos los elementos de *X* están relacionados con elementos de *Y*, es decir, $\forall x \in X,\ \exists\, y \in Y \ /\ (x,y) \in f.$

   (Se lee: Para todo x que pertenece al conjunto X, existe un y que pertenece al conjunto Y tal que el par ordenado (x,y) pertenece a la función f.)

2. **Condición de unicidad:** Cada elemento de *X* esta relacionado con un único elemento de *Y*, es decir, si
$$(x,y_1) \in f \wedge (x,y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2.$$

Conceptos básicos

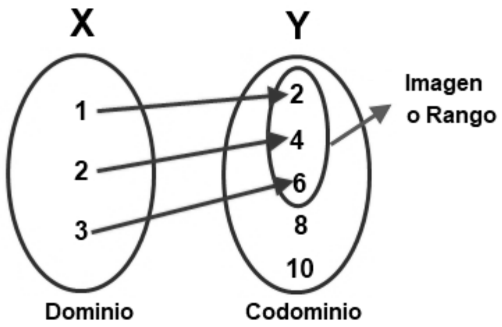
Para toda función $f: X \to Y$ podemos definir: Dominio (indicado como **D** ó **Dom**)

El dominio es el conjunto de elementos que tienen imagen, es decir es el subconjunto del conjunto de partida formado por aquellos valores de x (llamada variable independiente, que sólo tomará valores reales) para los que se puede calcular la imagen f(x) (llamada variable dependiente, y que también sólo tomará valores reales) El Codominio es el conjunto de valores que pueden tomar la variable dependiente y.

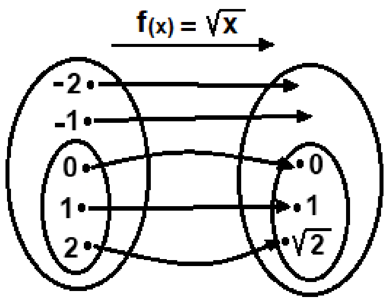
La variable independiente, que representa los elementos del dominio generalmente se grafica sobre el eje horizontal y la variable dependiente, por su parte, se grafica sobre el eje vertical.

$$\mathbf{Dom} = \{x \in \mathbb{R} / \ \exists\ f(x)\}, \qquad \mathbf{Im} = \{y \in \mathbb{R} / \ y = f(x)\}$$

En forma de diagrama de Venn:



Ejemplo para y = f (x) = $\mathbf{x}^{1/2}$



Estudio del dominio de una función

a.- Dominio de la función polinómica entera

El dominio es R (cualquier número real tiene imagen)

Ejemplo: $f(x) = x^2 - 5x + 6$ **Dom = R**

b.- Dominio de la función racional fraccionaria:

El dominio es R menos los valores que anulan al denominador (no puede existir un número cuyo denominador sea cero).

Ejemplo: $f(x)=\dfrac{2x-5}{x^2-5x+6}$

Entonces, los valores de x que anulan el denominador son:

$$x^2-5x+6=0 \qquad D=\mathbb{R}-\{2,3\}$$

c.- Dominio de la función irracional de índice impar

El dominio es R

Ejemplos: $f(x)=\sqrt[3]{x^2-5x+6}$ $\qquad D=\mathbb{R}$

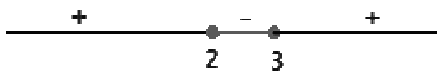
Entonces: $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x}{x^2-5x+6}}$ $\qquad D=\mathbb{R}-\{2,3\}$

d.- Dominio de la función irracional de índice par

El dominio está formado por todos los valores que hacen que el radicando sea mayor o igual que cero.

Ejemplo: $f(x)=\sqrt{x^2-5x+6}$

Entonces: $x^2-5x+6\geq 0$ $\qquad D=(-\infty,2]\cup[3,\infty)$



Combinando los conceptos anteriores, otro ejemplo: $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-5x+6}}{x+4}$

Como: $\begin{cases} x^2-5x+6\geq 0 \\ x+4=0 \end{cases}$ $\qquad \begin{matrix} (-\infty,2]\cup[2,3) \\ x\neq -4 \end{matrix}$ ***ver bien!!!!!***

Entonces: $D=(-\infty,-4)\cup(-4,2]\cup[2,3]\cup[3,\infty)$

Otro más. Parecido, pero distinto: $f(x)=\dfrac{x+4}{\sqrt{x^2-5x+6}}$

Como $x^2-5x+6>0$ $\qquad$ Entonces: $D=(-\infty,2)\cup(3,\infty)$

Ahora sí, **el último**: $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+4}{x^2-5x+6}}$

Como: $\dfrac{x+4}{x^2-5x+6}\geq 0$ $\qquad$ Entonces: $D=[-4,2)\cup(3,\infty)$

e.- Dominio de la función logarítmica

El dominio está formado por todos los valores que hacen que el radicando sea mayor que cero.

$$f(x) = \log(x^2 - 5x + 6)$$

El argumento del logaritmo debe ser positivo, por lo tanto $x^2 - 5x + 6 > 0$

Entonces: $D = (-\infty, 2) \cup (3, \infty)$

f.- Dominio de la función exponencial

El dominio es R.

g.- Dominio de la función seno

El dominio es R

h.- Dominio de la función coseno

El dominio es R

i.- Dominio de la función tangente

$$D = \mathbb{R} - \left\{(2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\}$$

O sea: $D = \mathbb{R} - \left\{\ldots, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots\right\}$

Recorrido o codominio

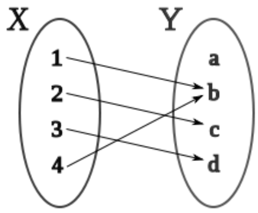
El recorrido o **conjunto de llegada** de f es el conjunto Y, y se denota Rec_f o bien C_f.

Ejemplos

- La función definida por $f(x) = x + 1$, tiene como Dominio e Imagen todos los números reales $(\mathbb{R})$.
- Para la función $g(x) = x^2$, en cambio, si bien su dominio es $\mathbb{R}$, sólo tendrá como imagen los valores comprendidos entre 0 y $+\infty$ que sean el cuadrado de un número real.

- En la figura se puede apreciar una función $f\colon X \to Y$, con:

$$\mathrm{Dom}_f = X = \{1,2,3,4\} \quad \mathrm{Rec}_f = Y = \{a,b,c,d\}$$



A cada elemento de *X* le corresponde un único elemento de *Y*. Además, el elemento *a* de*Y* no tiene origen, y el elemento *b* tiene dos (el 1 y el 4). Finalmente,

$$\mathrm{Im}_f = \{b,c,d\} \subseteq Y.$$

Esta función representada como relación, queda:

$$X \times Y = \{(1,b),(2,c),(3,d),(4,b)\}$$

Representación de funciones

Las funciones se pueden representar de distintas maneras:

- Como **expresión matemática**: ecuaciones de la forma *y* = *f*(*x*), que permiten representar el comportamiento de la función a lo largo de todo su dominio.

  Ejemplo: y = x+2.

- Como **tabulación**: tabla que permite representar algunos valores discretos de la función.

  Ejemplo:

X	-2	-1	0	1	2	3
Y	0	1	2	3	4	5

- Como **pares ordenados**: pares ordenados, muy usados en teoría de grafos.

  Ejemplo: A = {(-2, 0),(-1, 1),(0, 2),(1, 3), ... (x, x+2)}

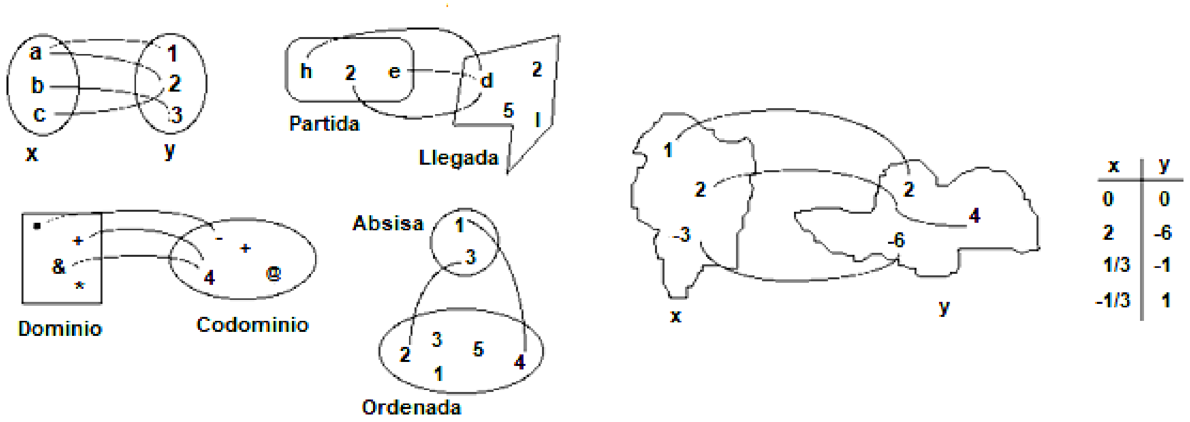
- Como **proposición**: una descripción por comprensión de lo que hace la función.

  Ejemplo: "Para todo *x*, número entero, *y* vale *x* más dos unidades".

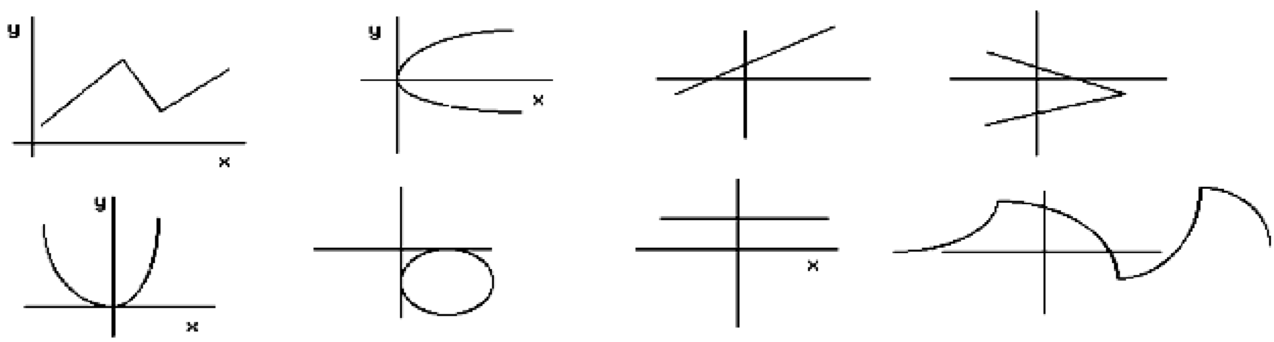
- Como **gráfica**: gráfica que permite visualizar tendencias en la función. Muy utilizada para las funciones continuas típicas del cálculo, aunque también las hay para funciones discretas.

"Función de *X* en *Y*: la condición de existencia asegura que de cada elemento sale alguna flecha y la de unicidad que sólo sale una".

Podemos analizar los gráficos y decir ¿cuáles son funciones?

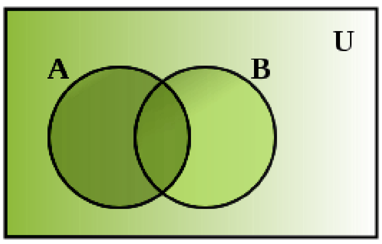


Si las gráficas que siguen representan una relación de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ podemos indicar ¿cuáles no cumplen con las condiciones para ser función?



Funciones según tipo de aplicación

Dados dos conjuntos **X**, **Y**, y todas las posibles aplicaciones que pueden formarse entre estos dos conjuntos, se pueden diferenciar los siguientes casos:

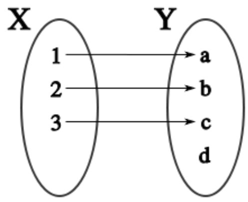


- Si a cada imagen le corresponde un único elemento del dominio, **inyectiva**.
- Si la aplicación es sobre todo el conjunto de llegada, **sobreyectiva**.
- Además de estos dos casos característicos, una aplicación puede ser inyectiva y sobreyectiva simultáneamente, y se denomina **biyectiva**.

Casos particulares

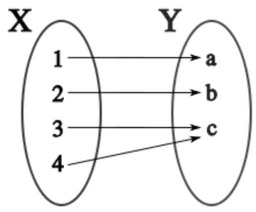
Aplicación inyectiva y no sobreyectiva

En una aplicación inyectiva cada elemento imagen tendrá un único origen y una no sobreyectiva tendrá al menos un elemento del conjunto final que no tenga elemento origen.



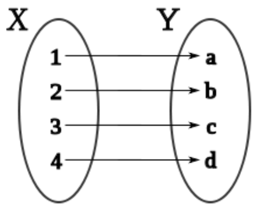
Aplicación no inyectiva y sobreyectiva

Una aplicación no inyectiva tiene al menos un elemento imagen que tiene dos o más orígenes y una sobreyectiva todos los elementos del conjunto final tienen al menos un elemento origen.

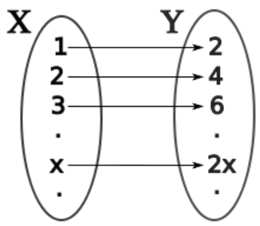


Aplicación inyectiva y sobreyectiva (biyectiva)

Por ser inyectiva los elementos que tienen origen tienen un único origen y por ser sobreyectiva todos los elementos del conjunto final tienen origen. También se la denomina “función uno a uno”.



Ejemplo



En el diagrama de la figura: todos los elementos de **Y**, que tienen origen, tienen un único origen, esto hace que la aplicación sea inyectiva, todos los elementos de **Y**, tienen origen, esto hace que la aplicación sea sobreyectiva.

Si tomaremos por conjunto inicial el conjunto de los números naturales: $X = \{1, 2, 3, ...\}$

Y por conjunto final el de los números naturales pares: $Y = \{2, 4, 6, ...\}$

Podemos ver que la relación $f : X \to Y$ es $f : x \mapsto 2x$

Por el que a cada número natural **x** de **X**, le asociamos un número par **2x** de **Y**, se cumple:

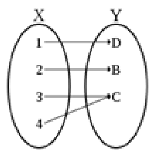
1. **f**: es una aplicación, dado que a cada uno de los valores **x** de **X** le corresponde un único valor **2x** de **Y**.

2. esta aplicación es inyectiva dado que a cada número par **2x** de **Y** le corresponde un único valor **x** de **X**.

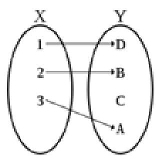
3. y es sobreyectiva porque todos los números pares tienen un origen.

Esto nos permite afirmar que hay el mismo número de números naturales que de números naturales pares, se da la paradoja de que los números naturales pares en un subconjunto propio de los números naturales, esta circunstancia solo se da con los conjuntos infinitos.

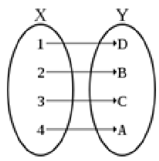
Resumen



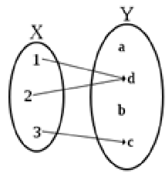
Sobreyectiva
No inyectiva



Inyectiva
No sobreyectiva



Biyectiva



No sobreyectiva
No inyectiva

Álgebra de las funciones

Composición de funciones

Dadas dos funciones *f: A* → *B* y *g: B* → *C*, donde la imagen de *f* está contenida en el dominio de *g*, se define la función composición

(*g* o *f*): *A* → *C* como **(*g* o *f*)(*x*) = *g* (*f*(*x*))**, para todos los elementos *x* de *A*.

$$\begin{array}{ccccc} A & \to & B & \to & C \\ x & \mapsto & f(x) & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$$

Ejemplos

Ejemplo 1:

Sean las funciones: $f(x) = 3x + 2$ $\qquad g(x) = \dfrac{x+3}{2x+1}$

Calcular:

1. $g \circ f$
2. $f \circ g$

1 $\quad g \circ f$

$$g \circ f = g\left[f(x)\right] = g\left(3x+2\right)$$

$$= \frac{3x+2+3}{2(3x+2)+1} = \frac{\mathbf{3x+5}}{\mathbf{6x+5}}$$

2 $f \circ g$

$$f \circ g = f\left[g(x)\right] = f\left(\frac{x+3}{2x+1}\right) = 3\left(\frac{x+3}{2x+1}\right) + 2 = \frac{3x+9}{2x+1} + \frac{2\cdot(2x+1)}{2x+1} =$$

$$= \frac{3x+9}{2x+1} + \frac{4x+2}{2x+1} = \mathbf{\frac{7x+11}{2x+1}}$$

Ejemplo 2:

Sean las funciones: $f(x) = \dfrac{1}{2x-1}$ $\quad g(x) = \dfrac{2x-1}{2x+1}$

Calcular: **1** $g \circ f$

2 $f \circ g$

1 $g \circ f$

$$g \circ f = g\left[f(x)\right] = g\left(\frac{1}{2x-1}\right) = \frac{2\left(\frac{1}{2x-1}\right)-1}{2\left(\frac{1}{2x-1}\right)+1} = \frac{\frac{2-2x+1}{2x-1}}{\frac{2+2x-1}{2x-1}} =$$

$$= \mathbf{\frac{3-2x}{2x+1}}$$

2 $f \circ g$

$$f \circ g = f\left[g(x)\right] = f\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right) = \frac{1}{2\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)-1} = \frac{1}{\frac{4x-2}{2x+1}-1} =$$

$$= \frac{1}{\frac{4x-2-2x-1}{2x+1}} = \mathbf{\frac{2x+1}{2x-3}}$$

Función inversa

Dada una función $f: A \to B$, se denomina función inversa de f, $f^{-1}: B \to A$ a la función que a cada elemento de B le hace corresponder el mismo elemento de A.

Existe función inversa de f* si *f es biyectiva

Ejemplos

Ejemplo 1: $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$

Cambiamos f(x) por y: $y = \dfrac{2x+3}{x-1}$

Quitamos denominadores: $y = \dfrac{2x+3}{x-1} \Rightarrow y(x-1) = 2x+3$

Quitamos paréntesis y pasamos al primer miembro las x:

$$2xy - y = 2x + 3 \Rightarrow 2xy - 2x = y + 3$$

Sacamos Común x y la despejamos: $x(y-2)y+3 \Rightarrow x = \dfrac{y+3}{y-2}$

Cambiamos x por $f^{-1}(x)$: $f^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{x-2}$

Ejemplo 2:

Encuentra la función inversa de $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Cambiamos f(x) por y: $y = \dfrac{1}{x}$

Cambiamos x por y: $x = \dfrac{1}{y} \longrightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x}$

Páginas WEB recomendadas por los autores:

Calculo de dominio de función en general:
https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/calculo/funciones/ejercicios-del-dominio-de-una-funcion.html

https://www.vadenumeros.es/cuarto/dominio-de-funciones.htm

CLASE Nº 7

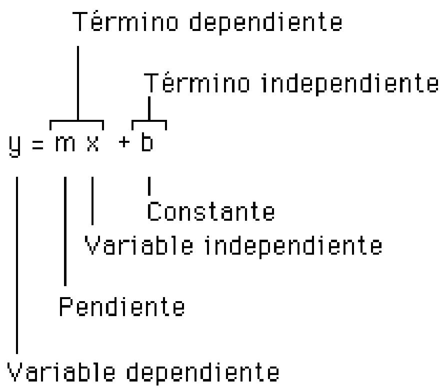
Funciones Algebraicas. Funciones Polinómicas

Expresión matemática formada por una suma de productos de números reales, por potencias enteras de una variable generalmente representada por la letra x; es decir, un polinomio es una expresión del tipo $P(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4...$, en la que la mayor potencia de la variable se la llama grado del polinomio.

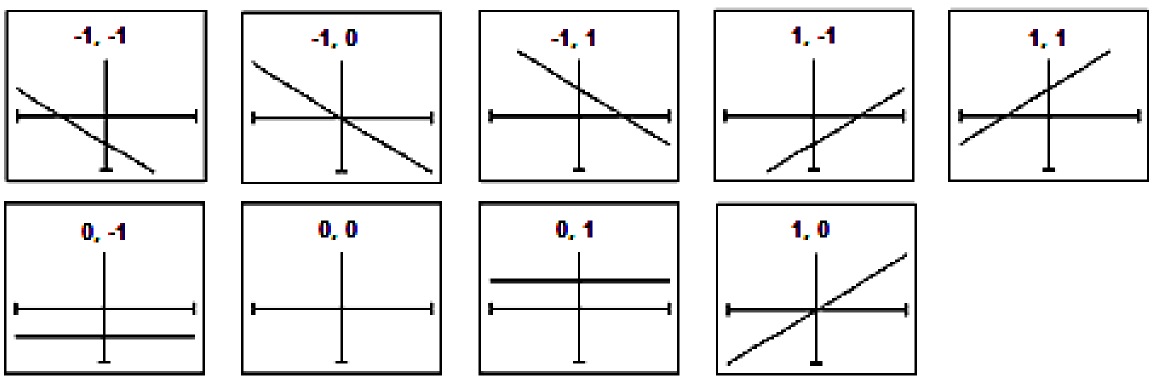
Un polinomio se puede también interpretar como una función real de variable real, en la que la x es una variable numérica de la función; así, por ej., $P(x) = 3x + 2$, sería la función que asigna al valor 1, $P(1) + 3.1 +2 = 5$, etc. De esta manera (interpretando las x como variables numéricas) se pueden generalizar las operaciones definidas en los números reales a operaciones de polinomios, que quedan entonces definidas como:

Función lineal

Llamaremos función lineal a una ecuación del tipo $y = mx +b$



En las siguientes gráficas se muestran combinaciones posibles de m con b y valores de -1,0 y 1. La segunda por ejemplo, muestra $y = -1x + 0$ es decir $y = -x$.



Las conclusiones sobre el crecimiento de la función a partir del signo de m, son:

Si m > 0 la recta es creciente (primera fila de gráficos), en caso contrario es decreciente (última fila de gráficos). Un caso interesante es la fila del medio, que muestra el caso de funciones con **m = 0** (**pendiente nula**).

r1 y **r**2 son paralelas si y solo si: $m_1 = m_2$

r1 y **r**2 son perpendiculares si y solo si: $m_1 = -\dfrac{1}{m_2}$

Función Cuadrática

El estudio de las funciones cuadráticas resulta de interés no sólo en matemática sino también en física y en otras áreas del conocimiento como por ejemplo: la trayectoria de una pelota lanzada al aire, la trayectoria que describe un río al caer desde lo alto de una montaña, la forma que toma una cuerda floja sobre la cual se desplaza un equilibrista, el recorrido desde el origen, con respecto al tiempo transcurrido, cuando una partícula es lanzada con una velocidad inicial.

Puede ser aplicada en la ingeniería civil, para resolver problemas específicos tomando como punto de apoyo la ecuación de segundo grado, en la construcción de puentes colgantes que se encuentran suspendidos en uno de los cables amarrados a dos torres, etc.

Existen fenómenos físicos que el hombre a través de la historia ha tratado de explicarse. Muchos hombres de ciencias han utilizado como herramienta principal para realizar sus cálculos la ecuación cuadrática. Como ejemplo palpable, podemos mencionar que la altura S de una partícula lanzada verticalmente hacia arriba desde el suelo está dada por $S = V_0 t - \frac{1}{2} g t^2$, donde S es la altura, V_0 es la velocidad inicial de la partícula, g es la constante de gravedad y t es el tiempo.

La función cuadrática responde a la formula: $y = a x^2 + b x + c$ con a distinto de 0. Su gráfica es una curva llamada parábola cuyas características son:

Si a es mayor a 0 es cóncava y admite un mínimo. Si a es menor a 0 es convexa y admite un máximo.

Vértice: Puntos de la curva donde la función alcanza el máximo o el mínimo.

Eje de simetría: $x = x_v$.

Intersección con el eje y.

Intersecciones con el eje x: se obtiene resolviendo la ecuación de segundo grado.

Ejemplo de función cuadrática:

Si $f(x) = x^2 - 2x + 3$

Entonces: a = -1 ,b = -2 y c = 3

Conocemos la expresión (llamada Fórmula resolvente o de Bascara): $(x_1, x_2) = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Esta expresión permite hallar las raíces en una función de este tipo.

Entonces resulta:

$$(x_1,x_2)=\frac{-(-2)\pm\sqrt{-2^2-4(-1)(3)}}{2(-1)}$$

$$(x_1,x_2)=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{-2}$$

$$(x_1,x_2)=\frac{2\pm\sqrt{16}}{-2} \qquad x_1=\frac{2-4}{-2}\quad(\mathrm{I})$$

$$(x_1,x_2)=\frac{2\pm 4}{-2} \qquad x_1=\frac{2+4}{-2}\quad(\mathrm{II})$$

A continuación, se halla el valor de x que determina el eje de simetría de la función:

$$x_v=\frac{x_1+x_2}{2} \longrightarrow x_v=\frac{1+(-3)}{2}=1 \quad (\mathrm{III})$$

Y el y_v , reemplazando en la función: $f(-1)=-(-1)^2-2(-1)+3=-1+2+3=4 \quad (\mathrm{III})$

Luego observando la función tomamos el valor del término independiente: c= 3 (IV)

Como la función es simétrica, sabemos que a la misma distancia del eje de simetría (en este caso a la derecha) se halla el otro valor de x con y= 3.

(Determinar este valor de x mediante una expresión matemática, es muy sencillo)

Con lo cual determinamos: x = -2 (V)

En resumen, hallamos los siguientes puntos notables que nos permiten graficar:

I (1, 0) Raíz

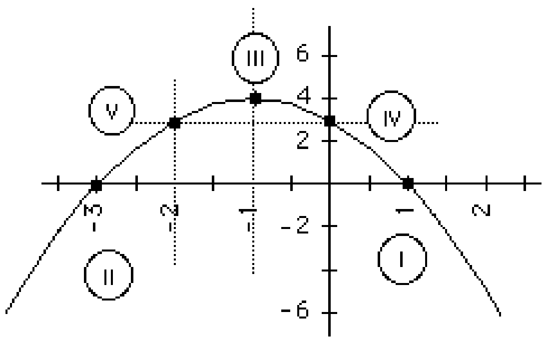
II (-3, 0) Raíz

III (-1, 4) Vértice

IV (0, 3) Término independiente

V (-2, 3) Simétrico del TI.

Ahora si graficamos:



Truco: *Una los puntos en el siguiente orden: IV-I, III-IV, V-II, III-V, luego repase el trazo, esto permite una línea mejor formada.*

Ahora bien, ¿qué hacer cuando no existen raíces reales? (¿cómo se puede expresar esto de otra manera?)

Grafiquemos: $g(x) = x^2 + 2x + 3$

Y comprobaremos que no tiene raíces reales.

Una buena idea es por ejemplo averiguar para que valor de x , g(x) vale seis, con lo cual tenemos:

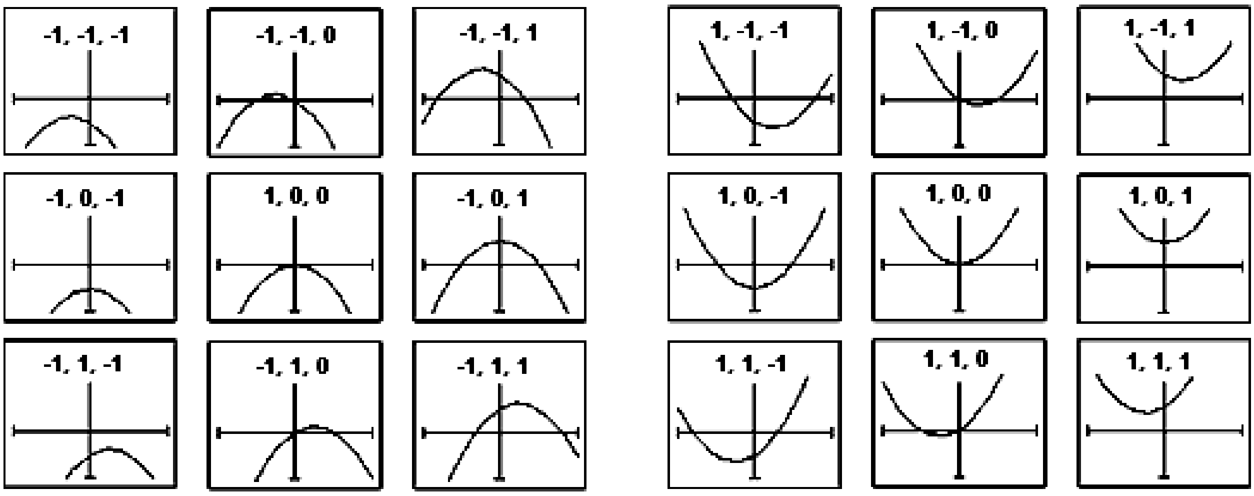
$$x^2 + 2x + 3 = 6$$
$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

Y entonces obtenemos los valores de las "raíces en seis" y podemos proceder como en el caso anterior. A la carga.

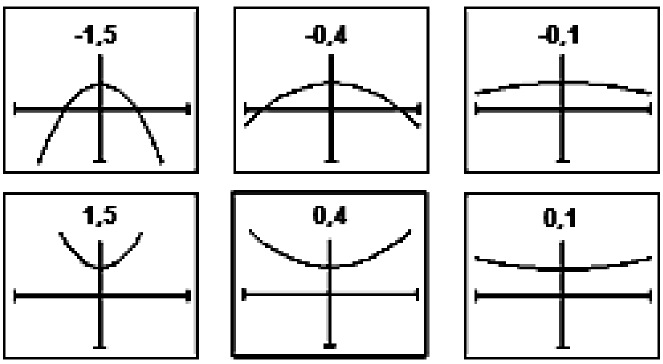
En la próximo gráfico se muestran todas las parábolas posibles que tengan a, b y c igual a 1,0 y 1 (a–0).

Saque conclusiones sobre: a) - la concavidad a partir del signo de a

b) - x_v a partir de la combinación de a y b



Las gráficas que siguen ($f(x) = ax^2 + 1, x[-2,2]$ e $y[-2,2]$), el valor de a está indicado en cada figura) saque conclusiones sobre el "grado de concavidad" a partir del valor de a.



Ejercicios de Función Cuadrática

1.- Ejercicios para discusión: Encuentra el vértice, intersecciones con el eje x, intersección con el eje y, eje de simetría, dominio y recorrido. Indica en qué intervalo la función es creciente y decreciente. Dibuja la gráfica para cada una de las siguientes funciones:

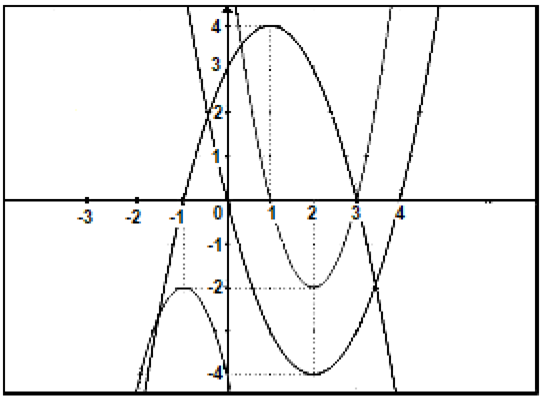
$f(x) = x^2 - 2x - 3$
$g(x) = -x^2 - 2x + 3$
$h(x) = -x^2 + 2x + 3$
$j(x) = x^2 + 2x - 3$

2.- Grafica las siguientes funciones hallando previamente sus elementos principales:

a) $y = 4.x^2$
b) $y = - x^2$
c) $y = - x^2 + 4$
d) $y = 2.x^2 + 3$
e) $y = (x - 3)^2$
f) $y = (x - 2)^2 + 1$
g) $y = -(x + 2)^2 + 3$
h) $y = - 4.x^2 + 4.x - 1$
i) $y = x^2 + 2.x + 2$
j) $y = -x^2 + 3.x$

3.- Observa los siguientes gráficos correspondientes a funciones cuadráticas e indica para cada uno de ellos:

a) El valor de los ceros.
b) Las coordenadas del vértice.
c) El valor de la ordenada al origen.
d) El signo de a.
e) El eje de simetría.



4.- Se procura interceptar en el punto más distante de la Tierra, un proyectil cuya trayectoria sigue el gráfico de $f(x)= -2x^2 + 800x$. Para ello, se lanzará desde el mismo lugar, un misil de trayectoria rectilínea. ¿Con qué ángulo se debe lanzar dicho misil?

5.- Dibuja una parábola que pase por los siguientes puntos: (-1,0), (4,0), y (0,3).Determinar la expresión algebraica de la función que representa, y realizar el estudio analítico de la misma.

6.- Halla la expresión algebraica de una función cuadrática “f”, cuyo gráfico pasa por los puntos (0,0) y (4,0), y su vértice tiene coordenadas (2,4)

7.- Supongamos que el rendimiento intelectual de una persona que estudia desde las 9 hs hasta las 13 hs responde a la función R = 4t - t^2 (donde R es el rendimiento y t el tiempo transcurrido desde las 9 hs, medido en horas).

a) ¿A qué hora se obtiene el mayor rendimiento?
b) ¿cuál es el intervalo de mejor aprovechamiento?
c) Graficar.

8.- Una pelota de fútbol que está sobre el piso recibe una patada hacia arriba, si la altura que alcanza en metros viene dada por la fórmula $y = 3t + (-\frac{3}{4})\, t^2$ donde t se mide en segundos:

a) ¿en qué instante alcanza la altura máxima?
b) ¿cuál es esa altura?
c) ¿a los cuántos segundos vuelve a tocar el piso?

9.- Los ingresos y los costos en miles de unidades producidas por una empresa están dadas por las funciones:

I(x) = $50x - 4x^2$ donde x son miles de unidades producidas y vendidas
C(x) = 100 + 5x

Calcula:

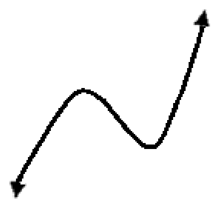
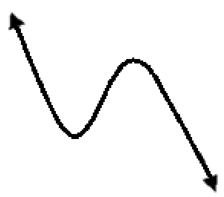
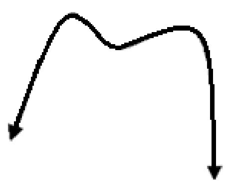
a) Los puntos de equilibrio en donde la empresa no gana ni pierde.
b) La función que da el beneficio.
c) Grafica.
d) Señala en el gráfico la región donde el beneficio es positivo.

Funciones Polinomiales de grado mayor a dos

Una función polinomial es de la forma $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$

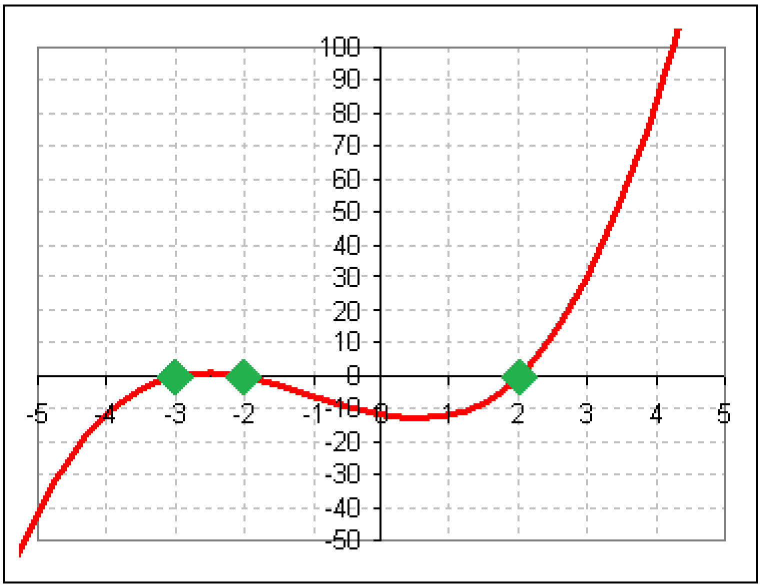
En donde $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ son constantes llamadas coeficientes, y *n* que es el exponente más alto se llama el ***grado*** del polinomio.

Observe que las funciones constantes, lineales y cuadráticas son funciones polinomiales de grado cero, uno y dos, respectivamente. El grado *n* de una función polinomial indica la forma general de su gráfica y determina el número de raíces:

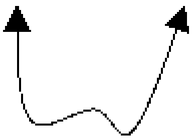
	n = 3	n = 4
an > 0		
an < 0		

Ejemplos

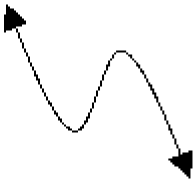
Sea $f(x) = (x - 2)(x + 3)(x + 2)$. Si se multiplican los términos con x se obtiene: $(x)(x)(x) = x^3$, por lo tanto el grado es $n = 3$ y $a_n = 1$. La ordenada al origen se obtiene de resolver el producto de (-2).(3).(2) = -12. Para encontrar las raíces se iguala a cero cada factor y se despeja x: $x = 2$, $x = -3$ *y* $x = -2$. La gráfica se muestra a continuación.



En las funciones cuadráticas, lineal y constante se encontraba un valor llamado ordenada al origen. Este valor era el término independiente e indicaba el valor en que la función cruzaba el *eje y*: la intersección con el *eje y*. Las funciones polinomiales de orden mayor a dos tienen un término independiente que indica la intersección con el *eje y*.

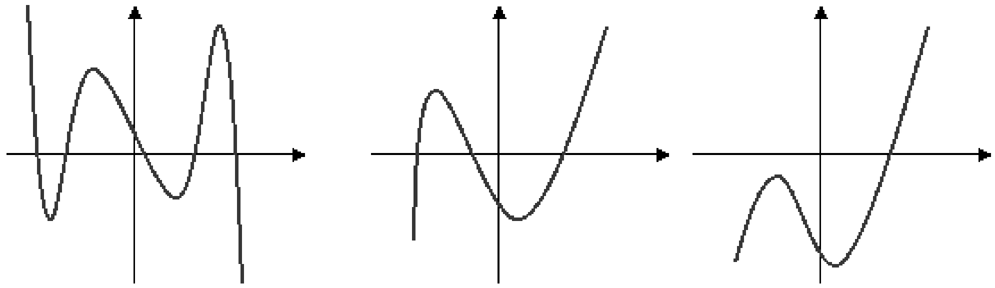


$f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 3x - 8$ es un polinomio de orden *4* y con $a_n = 3$, por lo tanto, su forma general es la de una *W*. La ordenada al origen vale *-8*.

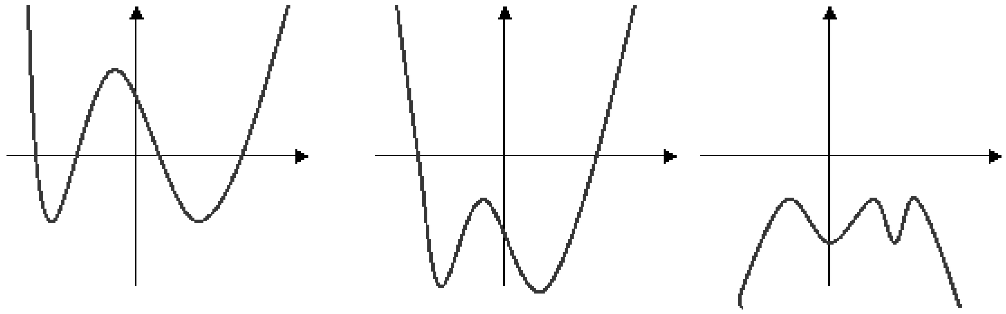


$f(x) = 9x^2 - 81x^5$ es un polinomio de orden *5* con $a_n = -81$, por lo tanto, su forma general es la de una *n* invertida. La ordenada al origen es *0*.

El orden del polinomio determina el número de raíces que esta va a tener. Un polinomio de orden 5 como el anterior presentará 5 raíces. Lo que esto implica es que el polinomio puede cruzar hasta cinco veces el eje x. En la siguiente figura se muestran polinomios de orden impar que cruzan 5 veces, 3 veces y 1 vez el eje x. Es importante recalcar que debido a la forma de los polinomios de orden impar, estos tienen que cruzar al menos una vez el eje x.



En los polinomios de orden impar, por ejemplo, $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 3x - 8$ hay 4 raíces y, por lo tanto, un máximo de 4 veces que cruza el eje x. En la siguiente figura se muestra un polinomio de orden par que cruza 4 veces, 2 veces y ninguna vez el eje x.



Solo queda, entonces, encontrar esos lugares en donde cruza el eje x: ***las raíces reales***.

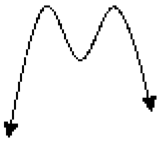
$$f(x) = (3x+6)(x-2)(5-x)(x+1)$$

Lo primero es encontrar el orden del polinomio y su comportamiento general.

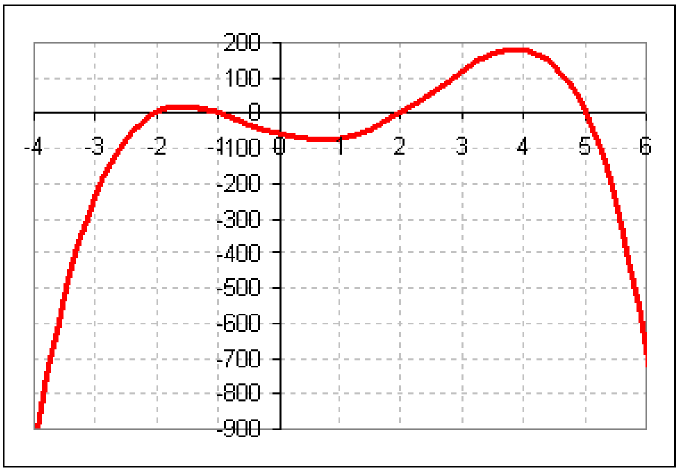
$$(3x)(x)(-x)(x) = -3x^4$$

$$(6)(-2)(5)(1) = -60$$

$$f(x) = \underbrace{(3x+6)}_{\substack{3x+6=0\\3x=-6\\x=-2}}\underbrace{(x-2)}_{\substack{x-2=0\\ \\x=2}}\underbrace{(5-x)}_{\substack{5-x=0\\ \\x=5}}\underbrace{(x+1)}_{\substack{x+1=0\\ \\x=-1}}$$



Ahora, el orden es 4 (par) y el coeficiente es -3 (negativo), por lo tanto, se que el polinomio debe tener forma de *M*. Lo único que queda es graficar.



Los polinomios pueden incluir factores que presenten exponentes. A continuación se presentan dos ejemplos.

Un exponente par en un factor indica que es esa raíz el polinomio toca el eje x pero no cruza.

$$(2t+4)^2 = 0$$
$$2t+4=0$$
$$2t=-4$$

El término independiente indica la ordenada al origen

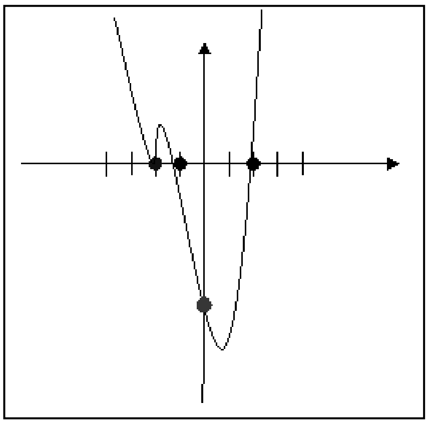
$$(-2)(4)^2(1) = -32$$

Estos valores definen la forma

$$(t)(2t)^2(t) = 4t$$

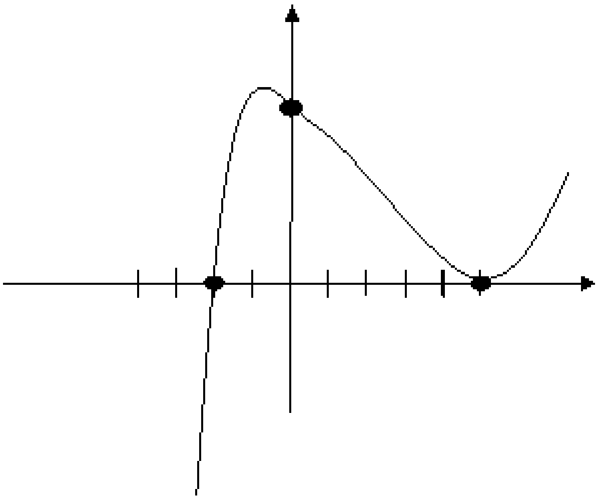
$$g(t) = (t-2)(2t+4)^2(t+1)$$

$$t-2=0 \qquad t+1=0$$

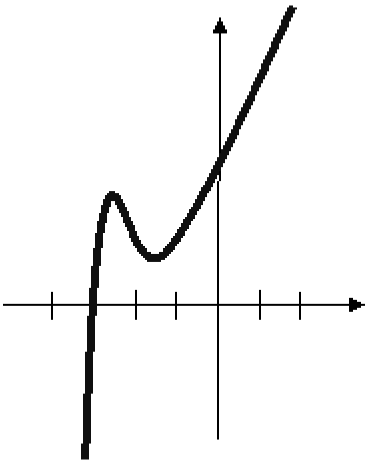


Dada la siguiente función $f(x)=(x+2)^3(x-5)^2$

Para encontrar la gráfica, primero se requiere saber el orden. Para ello, se multiplican los términos mayores de cada factor: $(x)^3(x)^2=x^5$



Así, $n = 5$ y $a_n = 1$. La forma general de la función es de *N*. Ahora, la ordenada al origen se obtiene de resolver el producto $(2)^3(-5)^2 = 200$ y este valor indica la intersección con el *eje y*. Por último, hay que encontrar las raíces. Esto se logra igualando el polinomio a cero, por lo tanto, igualando cada factor a cero. Se encuentran dos raíces: $x = -2$ que proviene de un factor elevado al cubo (potencia impar) y $x = 5$ que proviene de un factor elevado al cuadrado (potencia par). Esto implica que mientras que en $x = -2$ la función cruza el *eje x* (cambia de signo *y*), en $x = 5$, por tener el factor potencia par, la función sólo toca el *eje x* pero no cruza (no cambia de signo en *y*).



En las funciones cuadráticas se encontró que al no haber intersecciones con el eje x, las raíces eran imaginarias (raíces negativas). En las funciones polinomiales de orden mayor a dos sucede lo mismo.

$f(x)=(x+3)(4x^2+6)$ es un polinomio de orden *3* cuya $a_n = 4$, por lo tanto, tiene forma de *N*. La ordenada al origen vale *18*. Tiene una raíz *en x=-3* y la otra se puede encontrar resolviendo:

$$4x2+6=0$$
$$4x2=-6$$

Aquí ya es obvio que el resultado va a ser una raíz cuadrada negativa, por lo tanto, este polinomio tiene raíces imaginarias.

Análisis y construcción de funciones racionales

La forma de una función racional es una expresión racional del tipo $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ siendo ***p(x)*** y ***q(x)*** dos polinomios tales que ***q(x)*** es de grado mayor o igual que 1 y ***q(x)*** ≠ 0.

Ejemplo de función racional:

$$f:\mathbb{R}-\{-2,2\}\rightarrow\mathbb{R}/f(x)=\frac{x^3-2x^2+7}{x^2-4}$$

Casos particulares de funciones racionales:

Cuando el numerador y el denominador tienen raíces comunes, pueden factorizarse y simplificarse, obteniendo una expresión más sencilla. Sin embargo, el dominio de la función sigue siendo el de la función dada.

Por ejemplo:

$$f: \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R} / f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x+3)(x-3)}{(x-3)} = x + 3$$

Esta función tiene por gráfica una recta excluido el punto (3,6)

Función Homográfica:

es un tipo de función racional en la que el numerador y el denominador son polinomios de primer grado.

Su expresión analítica es: $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ o realizando la división euclídea:

$f(x) = \dfrac{k}{x+m} + n$ (forma canónica), cuando ∀ a, b, c, d ∈ R y además c ≠ 0 (sino sería una función afín) y ad ≠ bc (sino se trataría de una función constante).

Gráfica: su representación gráfica, en un sistema de coordenadas rectangulares, es una curva llamada **hipérbola**, compuesta de dos ramas simétricas respecto del punto de intersección de las dos asíntotas.

Las dos ramas de la hipérbola se sitúan en el primer y tercer cuadrante de las asíntotas si **k>0**; o en el segundo y cuarto cuadrante, si**k<0**.

Asíntota Vertical: en general, diremos que la recta de ecuación $x = -\dfrac{d}{c}$ es una **asíntota vertical** de f cuando al tomar valores de x cada vez más cercanos a $-\dfrac{d}{c}$, tanto por la derecha como por la izquierda, los valores de la función son cada vez mayores (en valor absoluto).

Asíntota Horizontal: en general, diremos que la recta de ecuación $y = \dfrac{a}{c}$ es una **asíntota horizontal** de f cuando al tomar valores de x cada vez mayores/pequeños (±∞) el valor de la función se acerca a ac, tanto por arriba como por abajo.

Dominio y rango: $Domf = \mathbb{R} - \{AV\}$; $Imf = \mathbb{R} - \{AH\}$

Puntos de corte con los ejes: eje-X: $f(x) = 0$ eje-Y: $f(0)$

Simetría: respecto del centro de la Hipérbola (intersección de las asíntotas)

Monotonía: siempre Creciente o decreciente por intervalos

Discontinuidad: en $x = -\frac{d}{c}$

Signo: positiva en $f(x) > 0$; negativa en $f(x) < 0$

Ejemplo:

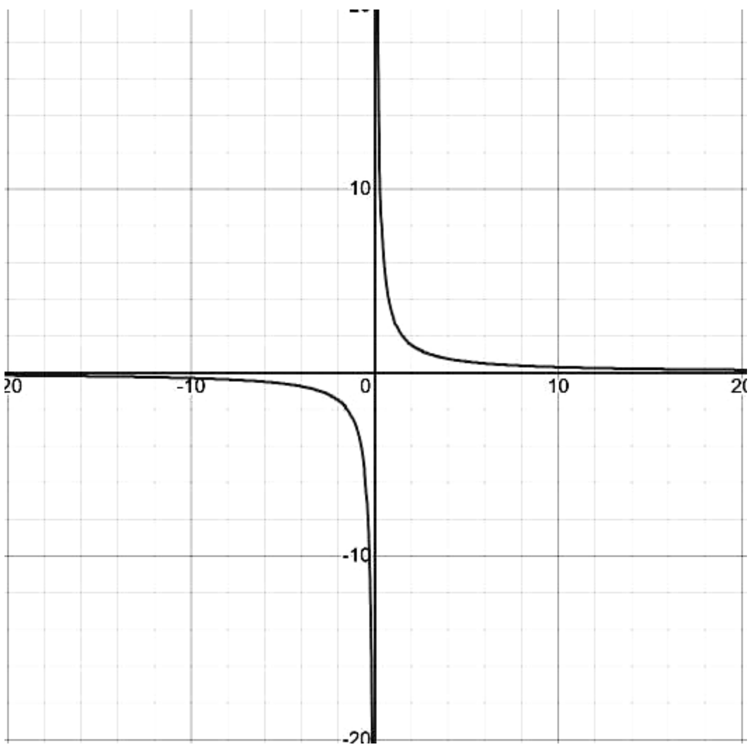
Analizar y graficar la siguiente función: $f(x) = \frac{9}{x-1} + 3 = \frac{3x+6}{x-1}$

ABRIR EN GEOGEBRA WEB APP (https://www.geogebra.org/m/cuPfmUmk)

Ejercicios.

Ejercicio 1 $F(x) = \frac{3}{x}$

La expresión carece de raíces, debido a que posee un valor constante en el numerador. La restricción a aplicar será *x diferente de cero*. Con asíntota horizontal en y = 0, y asíntota vertical en x = 0. No existen puntos de intersección con el eje y.



Ejercicio 1.2

$$F(x) = \frac{2x - 7}{x + 4}$$

Se observan 2 polinomios como en la definición inicial, por eso se procede según los pasos establecidos.

La raíz encontrada es x = 7/2 que resulta de igualar a cero la función.

La asíntota vertical está en x = – 4, que es el valor excluido del dominio por la condición de función racional.

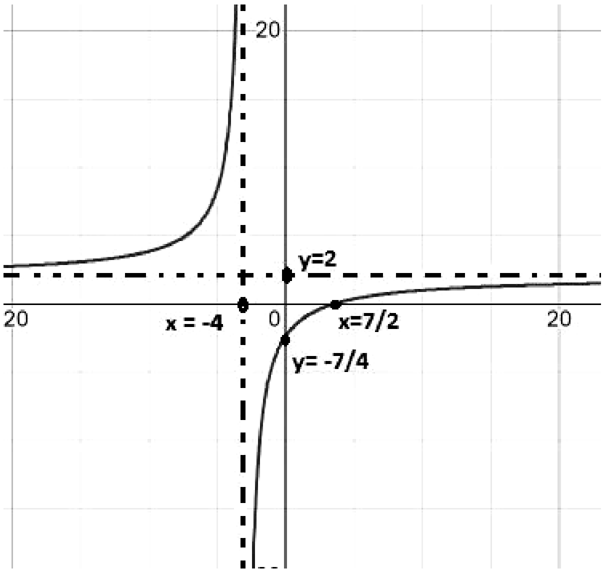
La asíntota horizontal está en y = 2, esto después de dividir 2/1, los coeficientes de las variables de grado 1.

Posee una intersección con las ordenadas en y = – 7/4. Valor encontrado después de igualar la x a cero.

La función crece constantemente, con un salto de más a menos infinito alrededor de la raíz x = -4. Su intervalo de crecimientos es (-∞ , – 4) U (- 4 , ∞).

Cuando el valor de x se acerca a menos infinito, la función toma valores cercanos a 2. Lo mismo sucede cuando la x se aproxima a más infinito.

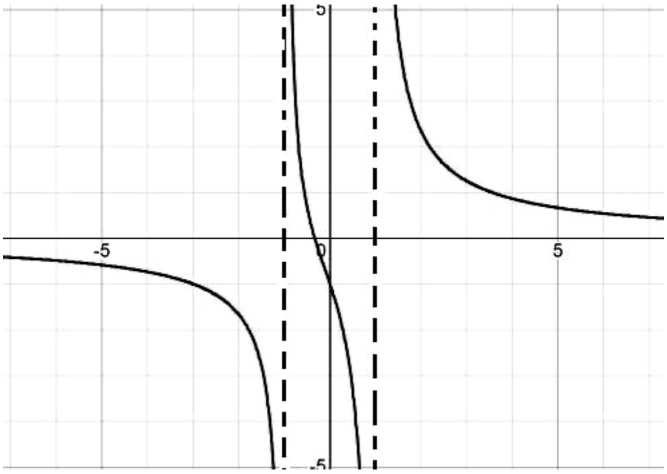
La expresión se aproxima a más infinito cuando se evalúa en – 4 por la izquierda, y a menos infinito cuando se evalúa en – 4 por la derecha.



Ejercicio 2

Se observa la gráfica de la siguiente función homográfica: $F(x) = \dfrac{3x + 1}{x^2 - 1}$

Describir su comportamiento, raíces, asíntotas vertical y horizontal, intervalos de crecimiento y decrecimiento e intersección con el eje de las ordenadas.



El denominador de la expresión nos indica al factorizar la diferencia de cuadrados (x + 1) (x – 1) los valores de las raíces.

De esta forma se pueden definir ambas asíntotas verticales como: $x = -1$ y $x = 1$

La asíntota horizontal corresponde al eje de las abscisas debido a que la potencia mayor se encuentra en el denominador.
Su única raíz está definida por $x = -1/3$.

La expresión siempre decrece de izquierda a derecha. Se aproxima a cero cuando se tiende a los infinitos. A menos infinito al aproximarse a -1 por la izquierda. A más infinito al aproximarse a -1 por la derecha. Menos infinito al aproximarse a 1 por la izquierda y más infinito al aproximarse a 1 por la derecha.

Páginas WEB recomendadas por los autores:

Funciones polinómicas en general y de grado superior:
https://matematicasn.blogspot.com/2015/12/funciones-algebraicas-y-polinomiales.html

Ejercicio resuelto de Función Lineal:
https://www.youtube.com/watch?v=qyzW-UIRofA

Ejercicios de Función Cuadrática:
https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/calculo/funciones/ejercicios-de-la-funcion-cuadratica.html

PPT de homográfica:
https://es.slideshare.net/SabrinaDechima/funcin-homogrfica

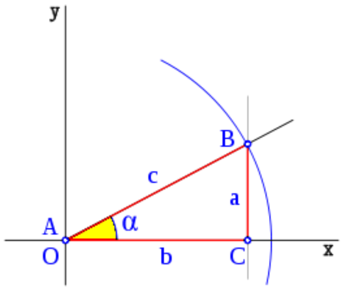
CLASE Nº 8

Trigonometría

La trigonometría es la rama de las matemáticas que estudia las relaciones entre los ángulos y los lados de los triángulos. Para esto se vale de las razones trigonométricas.

Razones trigonométricas

El triángulo ABC es un triángulo rectángulo en C; lo usaremos para definir las razones seno, coseno y tangente, del ángulo α, correspondiente



- **El seno** (abreviado como *sen*, o *sin* por llamarse "sinus" en latín) es la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa,

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}}$$

- **El coseno** (abreviado como *cos*) es la razón entre el cateto adyacente y la hipotenusa,

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$

- **La tangente** (abreviado como *tan* o *tg*) es la razón entre el cateto opuesto y el cateto adyacente,

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}}$$

Razones trigonométricas recíprocas

Se definen la **cosecante**, la **secante** y la **cotangente**, como las razones recíprocas al **seno**, **coseno** y **tangente**, del siguiente modo:

- **cosecante**: (abreviado como *csc* o *cosec*) es la razón recíproca de seno, o también su inverso multiplicativo:

$$\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{c}{a}$$

- **secante**: (abreviado como *sec*) es la razón recíproca de coseno, o también su inverso multiplicativo:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{c}{b}$$

- **cotangente**: (abreviado como *cot* o *cta*) es la razón recíproca de la tangente, o también su inverso multiplicativo:

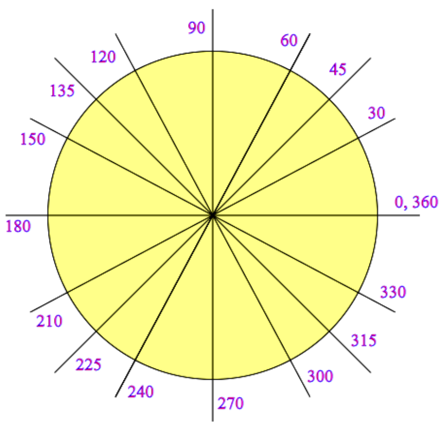
$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{b}{a}$$

Normalmente se emplean las relaciones trigonométricas **seno, coseno y tangente**, y salvo que haya un interés específico en hablar de ellos o las expresiones matemáticas se simplifiquen mucho, los términos cosecante, secante y cotangente no suelen utilizarse.

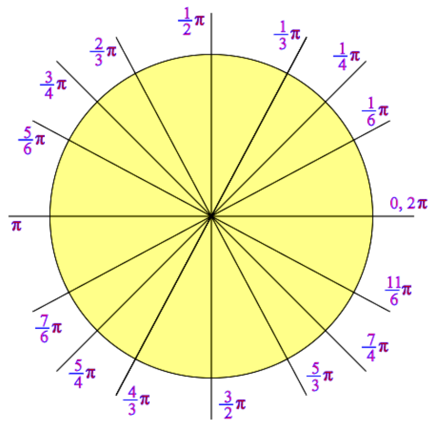
Unidades angulares

En la medida de ángulos, y por tanto en trigonometría, se emplean tres unidades, si bien la más utilizada en la vida cotidiana es el Grado sexagesimal, en matemáticas la más utilizada es el Radián, y se define como la unidad natural para medir ángulos, el Grado centesimal se desarrolló como la unidad más próxima al sistema decimal, se usa en topografía, arquitectura o en construcción.

Un Radián: es el ángulo cuyo arco es igual al radio, en una circunferencia completa hay 2π radianes.
Grado sexagesimal: unidad angular que divide una circunferencia en 360º.
Grado centesimal: unidad angular que divide la circunferencia en 400 grados centesimales.

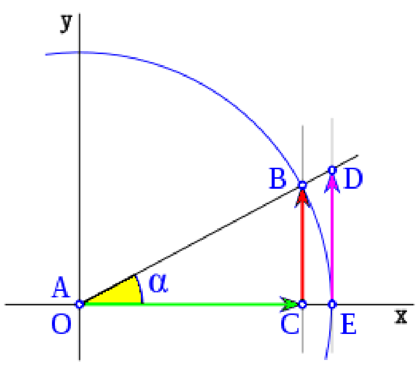


Circunferencia en Sistema sexagesimal



Circunferencia en Sistema Radial (radianes)

Sentido de las funciones trigonométricas



Dados los ejes de coordenadas cartesianas **xy**, de centro **O**, y una circunferencia goniométrica (circunferencia de radio la unidad, como la circunferencia trigonométrica) con centro en **O**; el punto de corte de la circunferencia con el lado positivo de las **x**, lo señalamos como punto **E**.

Fijate que el punto **A** es el vértice del triángulo, y **O** es el centro de coordenada del sistema de referencia:

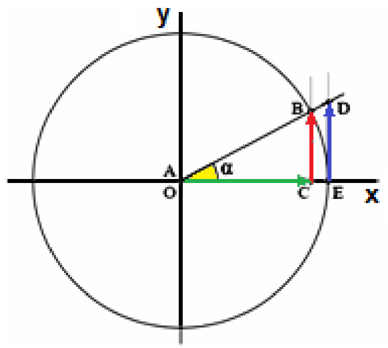
La recta **r**, que pasa por **O** y forma un ángulo pα sobre el eje de las **x**, corta a la circunferencia en el punto **B**, la vertical que pasa por **B**, corta al eje **x** en **C**, la vertical que pasa por **E** corta a la recta **r** en el punto **D**.

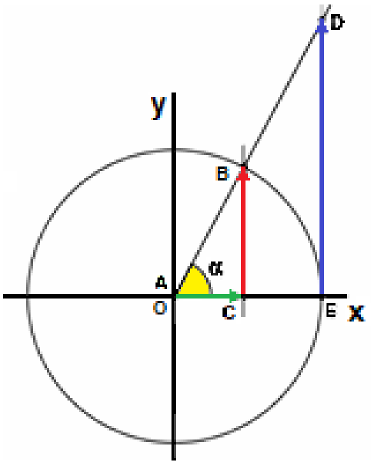
Por semejanza de triángulos: $\frac{\overline{CB}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{OE}}$

Los puntos **E** y **B** están en la circunferencia de centro **O**, por eso la distancia $\overline{OE}$ y $\overline{OB}$ son el radio de la circunferencia, en este caso al ser una circunferencia de radio = 1, y dadas las definiciones de las funciones trigonométricas:

$$\sin\alpha = \overline{CB} \qquad \cos\alpha = \overline{OC} \qquad \tan\alpha = \overline{ED}$$

Primer cuadrante





Partiendo de esta representación geométrica de las funciones trigonométricas, podemos ver las variaciones de las funciones a medida que aumenta el ángulo α .

Para $\alpha = 0$, tenemos que **A**, **C**, y **D** coinciden en **B**, por tanto:

$$\sin 0 = 0, \quad \cos 0 = 1, \quad \tan 0 = 0$$

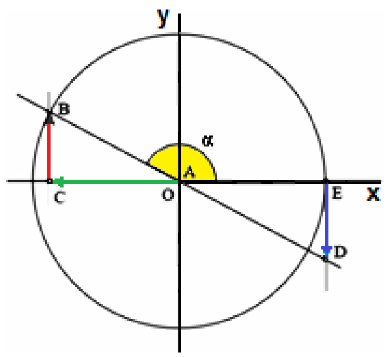
Si aumentamos progresivamente el valor de α, las distancias $\overline{CB}$ y $\overline{ED}$ aumentaran progresivamente, mientras que $\overline{OC}$ disminuirá.

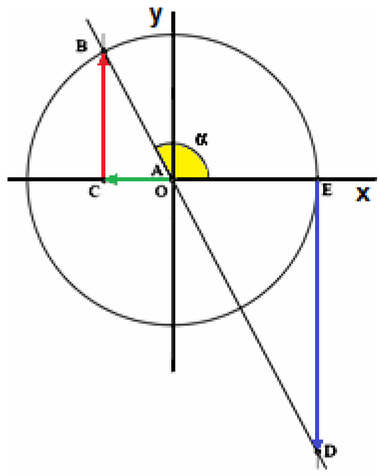
Fijate muy bien **que** $\overline{OC}$ y $\overline{CB}$ **están limitados por la circunferencia y por tanto su máximo valor absoluto será 1**, pero $\overline{ED}$ no está limitado, dado que **D** es el punto de corte de la recta **r** que pasa por **O**, y la vertical que pasa por **E**, en el momento en el que el ángulo $\alpha = 0,5\pi$ rad, la recta **r** será la vertical que pasa por **O**.

Dos rectas verticales no se cortan, o lo que es lo mismo la distancia $\overline{ED}$ será infinita.

La tangente toma valor infinito cuando $\alpha = 1/2\pi$ rad, el seno vale 1 y el coseno 0.

Segundo cuadrante





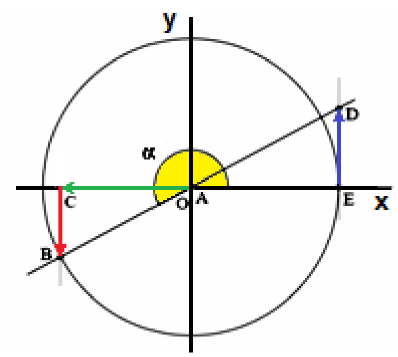
Cuando el ángulo **α** supera el ángulo recto, el valor del seno empieza a disminuir según el segmento $\overline{CB}$ el coseno aumenta según el segmento $\overline{OC}$, pero en el sentido negativo de las **x**, el valor del coseno toma sentido negativo, si bien su valor absoluto aumenta cuando el ángulo sigue creciendo.

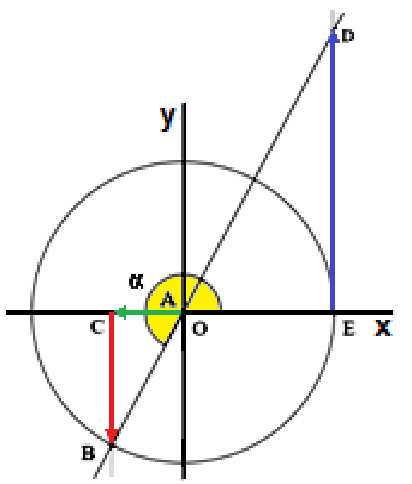
La tangente para un ángulo **α** inferior a 0,5 π rad se hace infinita en el sentido positivo de las **y**, para el ángulo recto la recta vertical **r** que pasa por **O** y la vertical que pasa por **E** no se cortan, por lo tanto la tangente no toma ningún valor real, cuando el ángulo supera los 0,5 π rad y pasa al segundo cuadrante, la prolongación de **r** corta a la vertical que pasa por **E** en el punto **D** real, en el lado negativo en el sentido de las **y**, y su valor absoluto disminuye a medida que el ángulo **α** aumenta progresivamente hasta los π rad.

Resumiendo: en el segundo cuadrante el seno de α $\overline{CB}$, disminuye progresivamente su valor desde 1, que toma para α = 0,5 π rad, hasta que valga 0, para α = π rad, el coseno, $\overline{OC}$, toma valor negativo y su valor varía desde 0 para α = 0,5 π rad, hasta –1, para α = π rad.

La tangente conserva la relación: $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ incluyendo el signo de estos valores.

Tercer cuadrante





En el tercer cuadrante, comprendido entre los valores del ángulo α =π rad a α = 0,5π rad, se produce un cambio de los valores del seno el coseno y la tangente, desde los que toman para π rad:

$$\sin \pi = 0 \qquad \cos \pi = -1$$

Cuando el ángulo α aumenta progresivamente, el seno aumenta en valor absoluto en el sentido negativo de las **y**, el coseno disminuye en valor absoluto en el lado negativo de las **x**, y la tangente aumenta del mismo modo que lo hacía en el primer cuadrante.

A medida que el ángulo crece el punto **C** se acerca a **O**, y el segmento $\overline{OC}$, el coseno, se hace más pequeño en el lado negativo de las **x**.

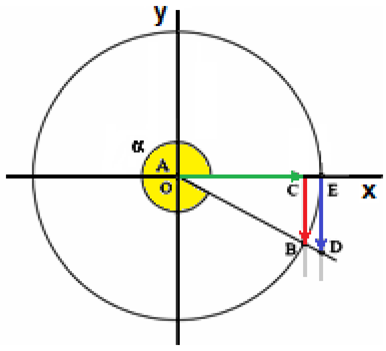
El punto **B**, intersección de la circunferencia y la vertical que pasa por **C**, se aleja del eje de las **x**, en el sentido negativo de las **y**, el seno, $\overline{CB}$.

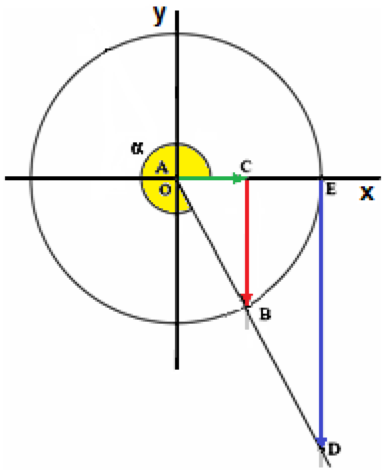
Y el punto **D**, intersección de la prolongación de la recta **r** y la vertical que pasa por **E**, se aleja del eje las **x** en el sentido positivo de las **y**, con lo que la tangente, $\overline{CB}$, aumenta igual que en el primer cuadrante.

Cuando el ángulo α alcance 1,5 π rad, el punto **C** coincide con **O** y el coseno valdrá cero, el segmento $\overline{CB}$ será igual al radio de la circunferencia, en el lado negativo de las **y**, y el seno valdrá –1, la recta **r** del ángulo y la vertical que pasa por **E** serán paralelas y la tangente tomara valor infinito por el lado positivo de las **y**.

El seno el coseno y la tangente siguen conservando la misma relación, tanto en valores como en signo, nótese que cuando el coseno vale cero, la tangente se hace infinita.

Cuarto cuadrante





En el cuarto cuadrante, que comprende los valores del ángulo α entre 1,5 π rad y 2 π rad, las variables trigonométricas varían desde los valores que toman para 1,5 π rad:

$$\sin(1,5\,\pi) = -1 \qquad \cos(1,5\,\pi) = 0 \qquad \tan(1,5\,\pi) = \infty$$

Hasta los que toman para 2 π rad pasando al primer cuadrante, completando una rotación:

$$\sin(2\pi) = \sin 0 = 0 \qquad \cos(2\pi) = \cos 0 = 1 \qquad \tan(2\pi) = \tan 0 = 0$$

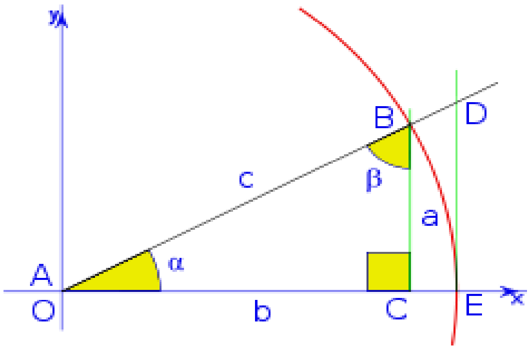
Como puede verse, a medida que el ángulo α aumenta, aumenta el coseno $\overline{OC}$ en el lado positivo de las **x**, el seno $\overline{CB}$ disminuye en el lado negativo de las **y**, y la tangente $\overline{ED}$ también disminuye en el lado negativo de las **y**.

Cuando α, vale 2 π ó 0 π al completar una rotación completa los puntos **B**, **C** y **D**, coinciden en **E**, haciendo que el seno y la tangente valga cero, y el coseno uno, del mismo modo que al comenzarse el primer cuadrante.

Funciones trigonométricas

Función Seno

En matemáticas el **seno** es la función obtenida al hacer variar el ángulo en la circunferencia trigonométrica o el valor de los lados del triangulo rectángulo que le da origen, siendo una de las funciones trascendentes.

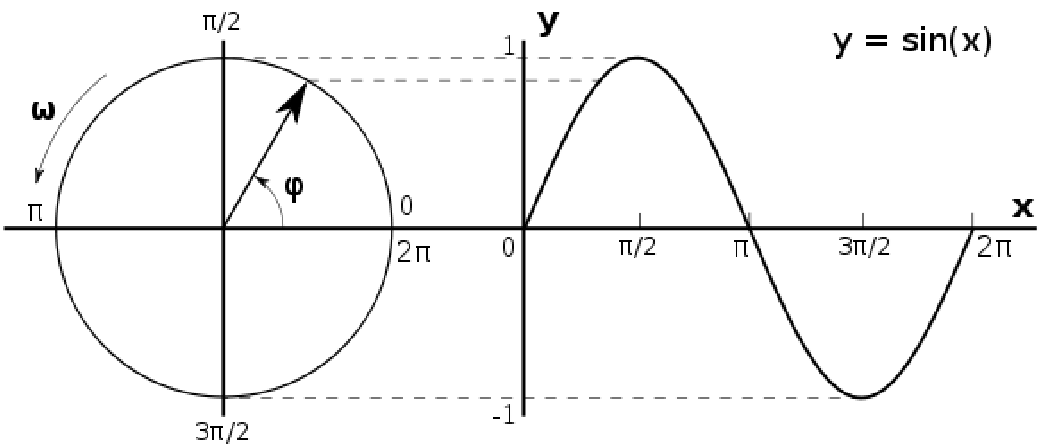


El **seno** de un ángulo de un triángulo rectángulo se define como la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa:

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$$

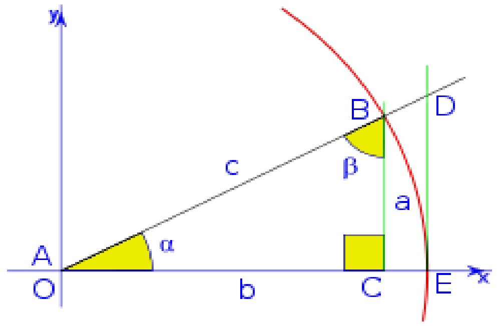
O también como la ordenada correspondiente a un punto que pertenece a una circunferencia unitaria centrada en el origen (c=1): $\sin(\alpha) = a$

Representación gráfica del seno



Función Coseno

En matemáticas el **coseno** es la función obtenida al hacer variar el ángulo en la circunferencia trigonométrica o el valor de los lados del triángulo rectángulo que le da origen, siendo una de las funciones trascendentes.

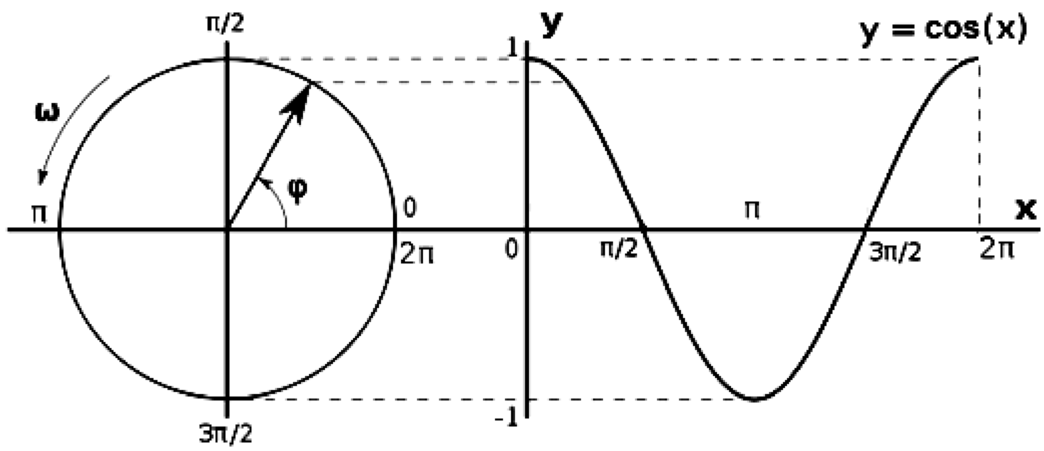


El **coseno** de un ángulo de un triángulo rectángulo se define como la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa:

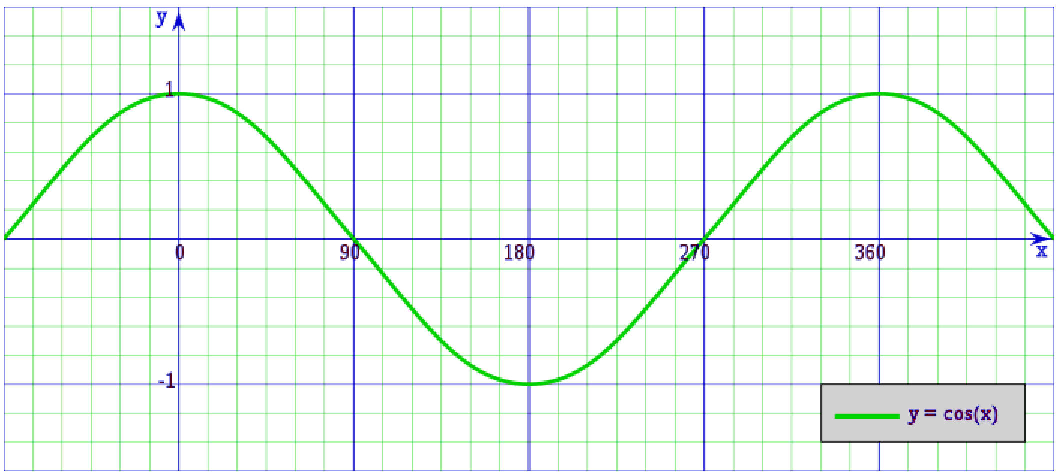
$$\cos(\alpha) = \frac{b}{c}$$

O también como la abscisa correspondiente a un punto que pertenece a una circunferencia unitaria centrada en el origen (c = 1), llamada Circunferencia Trigonométrica: $\cos(\alpha) = b$

Representación gráfica del coseno



Representación de la cosinusoide en el plano xy, los valores en el eje x en grados sexagesimales.



Estas son las representaciones básicas de las funciones **y = sen x** y **y = cos x**. Abordaremos en clase el grafico de las funciones completas:

y = A. sen (B (x + w)); **y = A . cos (B (x + w))**

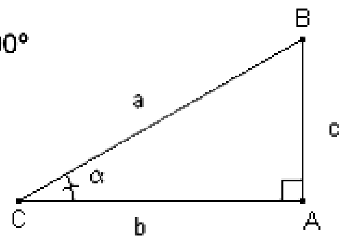
Siendo:

A: amplitud de la función
B: pulsación de la función
w: ángulo de fase o corrimiento de la función

Resolución de Triángulos Rectángulos

Razones trigonométricas de un ángulo agudo.

Consideraremos el triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ tal que $A = 90°$



Recordemos que en triángulo rectángulo cualquiera se cumplía el teorema de Pitágoras:
$a^2 = b^2 + c^2$

Definimos seno del ángulo α y lo representamos por sen α

$$\text{sen}\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

Definimos coseno del ángulo α y lo representamos por cos α

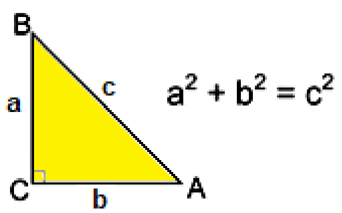
$$\cos\alpha = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}}$$

Definimos tangente del ángulo α y lo representamos por tg α

$$\text{tg}\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{CA}} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}}$$

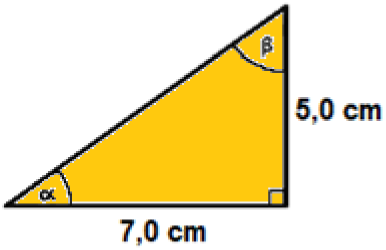
Teorema de Pitágoras

Proposición que compara los tres lados de un triángulo rectángulo, y establece que el cuadrado de la longitud "*c*" de la hipotenusa AB es igual a la suma de los cuadrados de las respectivas longitudes *a* y *b* de sus catetos CB y CA: $c^2 = a^2 + b^2$

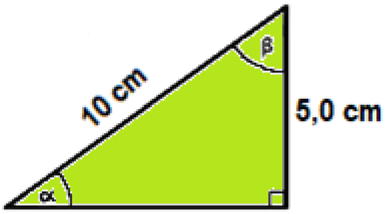


Ejercicios

1. Calcula el valor de las razones trigonométricas (seno, coseno y tangente) de todos los ángulos del siguiente triángulo



2. Encuentra las funciones trigonométricas de α y β en el siguiente triángulo:

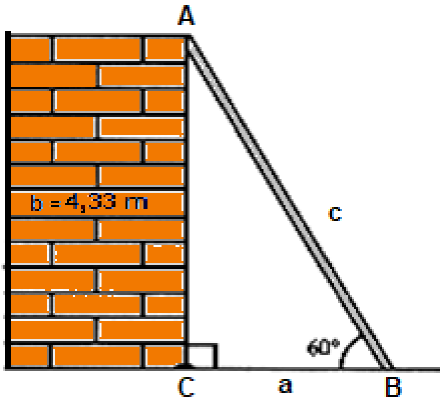


3. El perímetro de un triángulo equilátero es 18 m. Calcular su área.

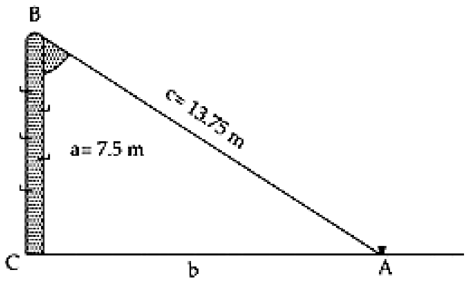
4. En la siguiente tabla se encuentran datos correspondientes a triángulos rectángulos. Los números destacados en negrita corresponden a los datos y los restantes a las soluciones. En minúscula están los lados y en mayúscula los ángulos opuestos.

nº	a	b	c	B	C
1	*57,44 m*	*50,8 m*	**26,81 m**	**62º 10' 40"**	*27º 49' 20"*
2	*1,53 m*	**0,87 m**	**1,26 m**	*34º 37' 27"*	*55º 22' 33"*
3	*1640,71 m*	*898,83 m*	**1372,6 m**	**33º 13' 06"**	*56º 46' 54"*
4	*1,02 m*	*0,79 m*	**0,65 m**	**50º 26' 50"**	*39º 33' 10"*
5	**246,.87 m**	*162,15 m*	**186,15 m**	*41º 03' 30"*	*48º 56' 30"*
6	**762,8 m**	*252,50 m*	*719,80 m*	*19º 19' 50"*	**70º 40' 10"**
7	*565,35 m*	**472,61 m**	**310,26 m**	*56º 42' 57"*	*37º 17' 03"*
8	**16,26 m**	**11,31 m**	*16,68 m*	*44º 04' 22"*	*45º 55' 38"*
9	**1748,3 m**	*1296,75 m*	**1172,60 m**	*47º 52' 42"*	*42º 07' 18"*
10	**138,46 m**	**95,40 m**	*100,35 m*	*43º 33' 06"*	*46º 26' 54"*
11	**1,26 m**	**0,42 m**	*1,19 m*	*19º 28' 16"*	*70º 31' 44"*
12	*168,7 m*	**151,40 m**	*74,42 m*	*63º 49' 20"*	**26º 10' 40"**
13	*146,81*	**66,72 m**	**130,77 m**	*27º 01' 52"*	*62º 58' 08"*
14	*77,30*	**22,82 m**	*73,86 m*	**17º 10' 10"**	*72º 49' 50"*
15	**100,15 m**	*97,32 m*	*23,64 m*	**76º 20' 42"**	*13º 39' 18"*
16	**86,06 m**	*57,49 m*	*64,04 m*	*41º 54' 52"*	**48º 05' 08"**
17	*32,65 m*	**11,21 m**	**30,67 m**	*20º 04' 39"*	*69º 55' 21"*
18	*38,67 m*	**17,75 m**	*34,35 m*	*27º 19' 35"*	**62º 40' 25"**
19	*706,03 m*	*451,74 m*	**542,60 m**	*39º 46' 45"*	**50º 13' 15"**
20	**93,87 m**	*92,27 m*	*17,26 m*	*79º 24' 10"*	**10º 35' 50"**
21	**6,21 m**	*3,85 m*	**4,87 m**	*38º 21' 05"*	*51º 38' 55"*
22	*134,09 m*	**86,35 m**	*102,59 m*	**40º 05' 11"**	*49º 54' 49"*
23	**10,51 m**	*10,35 m*	*1,82 m*	**80º 01' 30"**	*9º 58' 30"*
24	*17,65 m*	*3,71 m*	**17,26 m**	*12º 08' 46"*	**77º 51' 14"**
25	*10355,06 m*	**8763 m**	*5517 m*	*57º 48' 23"*	**32º 11' 37"**

5. Obtiene la longitud de una escalera recargada en una pared de 4.33 m de altura que forma un ángulo de 60° con respecto al piso.



6. Obtiene el ángulo que forma un poste de 7.5 m de alto con un cable tirante que va, desde la punta del primero hasta el piso, y que tiene un largo de 13.75 m.



7. Calcula el área de un triángulo rectángulo en el cuál un ángulo mide 30º y la hipotenusa mide 4.

8. ¿Cuán larga es la sombra que proyecta un mástil de 11 m de altura cuando el sol tiene un ángulo de elevación de 30º?

9. Calcula la altura a la que se encuentra un barrilete si el ángulo que forma el hilo, de 35 m de longitud con la horizontal, es de 30º y la mano del niño que sostiene el hilo está a 80 cm del suelo.

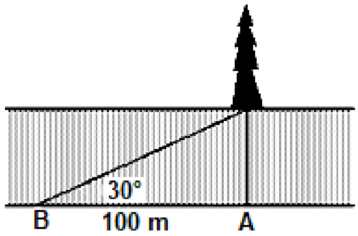
10. El sonar de un barco de salvamento localiza los restos de un naufragio en un ángulo de depresión de 12°. Un buzo es bajado 40 metros hasta el fondo del mar. ¿Cuánto necesita avanzar el buzo por el fondo para encontrar los restos del naufragio?

11. Un árbol de hoja perenne está sostenido por un alambre que se extiende desde 1.5 pies debajo de la parte superior del árbol hasta una estaca en el suelo. El alambre mide 24 pies de largo y forma un ángulo de 58° con el suelo. ¿Qué altura tiene el árbol?

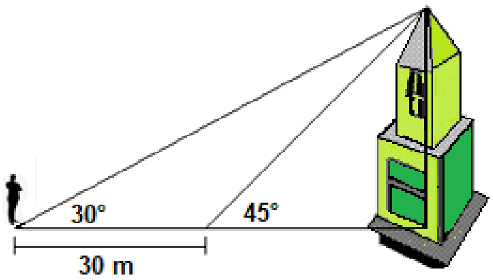
12. Desde un avión que se encuentra a una altura de 1500 m. sobre el suelo, se divisa otro avión que se encuentra a 1200 m de altura con un ángulo de depresión de 15º ¿Qué distancia separa a ambos aviones?

13. Desde un punto A en la orilla de un río se ve un árbol justo enfrente. Si caminamos 100 metros río abajo, por la orilla recta del río, llegamos a un punto B desde el que se ve el pino formando un ángulo de 30º con nuestra orilla. calcular la anchura del río.

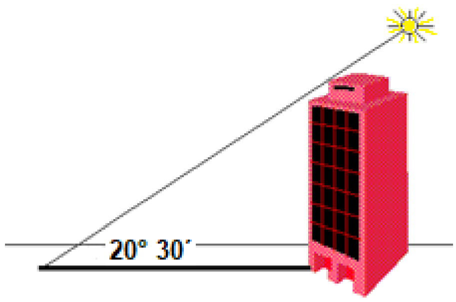
-



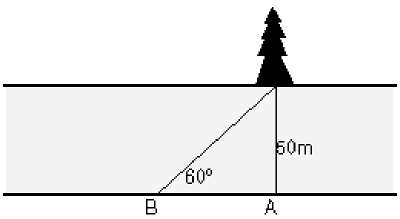
14. Desde un punto se observa un edificio cuya parte más alta forma con el suelo un ángulo de 30º, si avanzamos 30 metros, el ángulo pasa a ser de 45º. Calcular la altura del edificio.



15. Un edificio proyecta una sombra de 150 m. cuando el sol forma un ángulo de 20º 30' sobre el horizonte, calcula la altura del edificio.



16. Desde un punto A en la orilla de un río, cuya anchura es de 50 m., se ve un árbol justo enfrente. ¿Cuánto tendremos que caminar río abajo, por la orilla recta del río, hasta llegar a un punto B desde el que se vea el pino formando un ángulo de 60º con nuestra orilla?



17. Halla el perímetro del triángulo rectángulo que tiene un ángulo agudo de 30º y cuya hipotenusa es igual a 4 cm.

18. Halla el perímetro del triángulo rectángulo que tiene un ángulo agudo de 60º y cuya hipotenusa es igual a 2 cm

Páginas WEB recomendadas:

Funciones trigonométricas completas:
https://matematicaj.blogspot.com/2019/01/seno-coseno-tangente-cotangente-secante.html

Ejercicios Resueltos de Triángulos Rectángulos:
https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/trigonometria/problemas-resueltos-de-triangulos-rectangulos.html

CLASE Nº 9

Logaritmos

Definición de logaritmo

$$\log_a x = y \Rightarrow a^y = x \qquad a > 0 \text{ y } a \neq 1$$

De la definición de logaritmo podemos deducir:

1. No existe el logaritmo de un número con base negativa.

   $\nexists \log_{-a} x$

2. No existe el logaritmo de un número negativo.

   $\nexists \log_a (-x)$

3. No existe el logaritmo de cero.

   $\nexists \log_a 0$

Logaritmos decimales

Un logaritmo decimal de un número ***P*** se designa como ***log P***, y el resultado es el número al que hay que elevar el **10** para obtener ***P***.

$$x = \log P \iff 10^x = P$$

La primera vez que se ven los logaritmos uno se siente tal vez algo extrañado, por eso es bueno que se hagan pruebas para familiarizarse con ellos, por ejemplo decir cuál es el log 245 a base de tanteo: $10^{2,3} = 199$, $10^{2,4} = 251$, $10^{2,35} = 223$ y luego comprobar que vale log 245 con la calculadora.

Logaritmos de base cualquiera

Se define el logaritmo en base **a (a>0)** de **P**, y se escribe como $\log_a P$, el exponente al que hay que elevar **a** para obtener **P**.

$$\log_a P = x \iff a^x = P$$

Logaritmos neperianos (también llamados de Neper o Naturales)

Es un logaritmo en base ***e***. Se representa como **ln.**

$$\text{Log}_e x = \ln x$$

Propiedades de los logaritmos, sin importar cual sea su base

- El logaritmo de la base es uno: $\log_a a = 1$
- El logaritmo de 1 es cero para cualquier base: $\log_a 1 = 0$
- El logaritmo de un producto, para cualquier base es : $\log_a (P \cdot Q) = \log_a P + \log_a Q$
- El logaritmo de un cociente, para cualquier base es : $\log_a \left(\frac{P}{Q}\right) = \log_a P - \log_a Q$
- El logaritmo de una potencia, para cualquier base es : $\log_a P^n = n \log_a P$
- El logaritmo de una raíz, para cualquier base es : $\log_a \sqrt[n]{P} = \frac{1}{n} \log_a P$

Cambio de base

Esta propiedad nos permite calcular logaritmos de base cualquiera con una calculadora que solo disponga de logaritmo decimal.

$$\log_a P = \frac{\log P}{\log a}$$

Ejercicios en los que se aplican los conceptos de logaritmo

1.- $\log_2 64 + \log_2 \frac{1}{4} - \log_3 9 - \log_2 \sqrt{2}$

2.- $\log_2 \frac{1}{32} + \log_3 \frac{1}{27} - \log_2 1$

3.- Sabiendo que $\log 3 = 0.477$, calcula:

a.- $\log 30$ **b.-** $\log 300$ **c.-** $\log 3000$ **d.-** $\log 0.3$ **e.-** $\log 0.03$ **f.-** $\log 0.003$ **g.-** $\log 0.9$

4.- Sabiendo que $\log k = 14.4$, calcula:

a.- $\log\left(\frac{k}{100}\right)$ **b.-** $\log\left(0.1k^2\right)$ **c.-** $\log\left(\sqrt[3]{\frac{1}{k}}\right)$ **d.-** $(\log k)^{\frac{1}{2}}$

5.- Demuestra la siguiente igualdad siendo $a \neq 1$

$$\frac{\log \frac{1}{a} + \log \sqrt{a}}{\log a^3} = -\frac{1}{6}$$

6.- Elimina logaritmos de la expresión: $\log C = 2\,\log 7 - 3\log x - \frac{4}{5}\log y + \frac{1}{2}\log z$

7.- Elimina logaritmos de la expresión: $\log D = 3\,\log 2 - \frac{1}{2}\log x + \frac{3}{4}\log y - 5\log z$

8.- Halla la expresión logarítmica a partir de la siguiente expresión algebraica:

$$C = \frac{27x^4\sqrt[3]{7^4}}{8\sqrt[7]{y^2}}$$

9.- Halla la expresión logarítmica a partir de la siguiente expresión algebraica:

$$D = \frac{3x^2\sqrt[5]{4^3}}{2z^3\sqrt{7}}$$

10.- Sabiendo que $\log 2 \approx 0.3$ y que $\log 3 \approx 0.5$, calcula $\log_3\left(0.75 \cdot \sqrt{96}\right)$

Ejercicios de ecuaciones logarítmicas y exponenciales

1) Hallar el valor de x

a.- $\log x = \log 36 - \log 9$ **b.-** $\ln x = \ln 17 + \ln 13$ **c.-** $7^{1+2x} - 50 \cdot 7^x + 7 = 0$

d.- $\log(x^2+1) - \log(x^2-1) = \log\frac{13}{12}$ **e.** $\ln(x-3) + \ln(x+1) = \ln 3 + \ln(x-1)$

f.- $2 \cdot \ln(x-3) = \ln x - \ln 4$ **g.-** $\log(x+3) - \log(x-6) = 1$ **h.-** $2^{\frac{1}{x}} = 16$

i.- $\sqrt{7^x} = \frac{1}{49}$ **j.-** $0.5^x = 16$

2) Cambio de base

a) $\log_2 5 =$ b) $\log_3 2 =$ c) $\log_3 7 =$ d) $\log_5 24 =$

3) Calcula:

a) $\log_2 8 =$ R : 3 b) $\log_3 9 =$ R : 2 c) $\log_4 2 =$ R : 0,5 d) $\log_{27} 3 =$ R : 1/3

e) $\log_2 0{,}25 =$ R : – 2 f) $\log_{0,5} 16 =$ R : – 4 g) $\log_{0,1} 100 =$ R : – 2

h) $\log_5 0{,}2 =$ R : – 1 i) $\log_5 25 - \log_5 5 =$ R : 1 j) $\log_4 64 + \log_8 64 =$ R : 5

k) $\log 0{,}1 - \log 0{,}01 =$ R : 1 l) $\log 5 + \log 20 =$ R : 2 m) $\log 2 - \log 0{,}2 =$ R : 1

n) $\log 32 / \log 2 =$ R : 5 o) $\log 3 / \log 81 =$ R : 0,25 p) $\log_2 3 \times \log_3 4 =$ R : 2

q) $\log_9 25 \div \log_3 5 =$ R : 1

4) Determina el valor de x:

a) $\log_3 81 = x$ R : 4 b) $\log_5 0{,}2 = x$ R : –1

5) Si $\log 2 = 0{,}301$, $\log 3 = 0{,}477$ y $\log 7 = 0{,}845$, entonces:

a) $\log 8 =$ R: 0,903 b) $\log 9 =$ R: 0,954

c) $\log 5 =$ R: 0,699 d) $\log 54 =$ R : 1,732

e) $\log 75 =$ R : 1,875 f) $\log 0{,}25 =$ R : 0,602

g) $\log (1/6) =$ R : – 0,778 h) $\log (1/98) =$ R : – 1,991

i) $\log (1/36) =$ R : – 1,556 j) $\log (2/3) =$ R : – 0,176

k) $\log 0{,}3 =$ R : – 0,523 l) $\log 1{,}2 =$ R : 0,097

Situaciones problemáticas que se resuelven mediante la aplicación de logaritmos

1.- Para determinar la edad de una roca la ciencia actualmente ha podido desarrollar una técnica basada en la concentración de material radiactivo en su interior. Cuanto más joven es la roca mayor concentración de material radiactivo encontraremos. $C_{(x)} = k.3^{-t}$ es la fórmula que se utiliza, donde $C_{(x)}$ representa la concentración del material radiactivo, t el tiempo transcurrido medido en cientos de años y "k" la concentración del elemento en el momento de formarse la roca. Si k = 4500.

a) ¿Cuánto tiempo debe haber pasado para que hallemos una concentración de 1500?

b) ¿Qué concentración tendríamos al cabo de dos siglos?

c) ¿En qué tiempo se acabaría este material?

Rta.: a) como t = 1, pasaron cien años. b) $1{,}7.10^{-92}$. c) La ecuación no tiene como resultado el número cero, por lo que teóricamente siempre quedaría un mínimo resto de material radiactivo.

2.- El crecimiento de una colonia de mosquitos sigue un crecimiento exponencial que puede ser modelado con la siguiente ecuación:

$$A(t) = A_{(0)}\, e^{kt}$$

Inicialmente había 1000 mosquitos y después de un día la población de éstos aumenta a 1800. Responder:

a) ¿Cuántos mosquitos habrá en la colonia después de 3 días?
b) ¿Cuánto tiempo tendría que pasar para que la colonia tenga 10000 mosquitos?

3.- El crecimiento de una colonia de abejas está determinado por la siguiente ecuación:

$$P(t) = \frac{230}{1 + 56{,}5.e^{-0{,}37\,t}}$$

a) ¿Cuántas abejas había inicialmente?
b) ¿Cuánto tiempo les tomará a las abejas tener una población igual a 180?

Rta.: a) La población inicial corresponde con t = 0, por lo tanto P(0) = 230 / (1 + 56,5) = 4

b) 180 = 230 / [1 + 56,5 . $e^{(-0{,}37\,t)}$] → [1 + 56,5 . $e^{(-0{,}37\,t)}$] = 230 / 180 = 1,278

→ 56,5 . $e^{(-0{,}37\,t)}$ = 1,278 - 1 = 0,278 → $e^{(-0{,}37\,t)}$ = 0,278 / 56,5 = 0,004916;

Aplicamos logaritmos: - 0,37 t = Ln (0,004916) = - 5,315 → t = - 5,315 / (- 0,37)

➔ **t = 14,36**

Ecuaciones Logarítmicas (ejercicios):

Halla el valor de x en las siguientes ecuaciones logarítmicas:

1. 5 log 2x = 20 — Sol: x = 5000
2. 3 log 5x = −9 — Sol: x = 0, 0002

3. $\log(2x-44) = 2$ Sol: $x = 72$
4. $\log(x+1)^2 = 2$ Sol: $x = 9$; $x = -11$
5. $\log(7x+65) - \log 5 = 1$ Sol: $x = 5$
6. $\log_3(x-4) = 2$ Sol: $x = 13$
7. $\log_2(x-5) = 4$ Sol: $x = 21$
8. $\log(2x+50) = 2$ Sol: $x = 25$
9. $\mathrm{Log}_6(2x-3) = \log_6 12 - \log_6 3$ Sol: $x = 3{,}5$
10. $\mathrm{Log}_4(3x+2) = \log_4 5 + \log_4 3$ Sol: $x = 4{,}3$
11. $2\log_3 x = 4\log_3 8$ Sol: $x = 64$
12. $3\log x = 3\log 5$ Sol: $x = 5$
13. $\ln(-4-x) + \ln 3 = \ln(2-x)$ Sol: $x = -7$
14. $\ln x + \ln(x+4) = \ln 15 + \ln 3$ Sol: $x = 5$
15. $\log_4(x) = -2$ Sol: $x = \frac{1}{16}$
16. $\log_5(x^2) = -2$ Sol: $x = \pm\frac{1}{5}$
17. $\log(x^2) = -4$ Sol: $x = \pm\frac{1}{100}$
18. $\log_3(4x-5) = \log_3(2x+1)$ Sol: $x = 3$
19. $2\log_3(x) = 3\log_3 4$ Sol: $x = 8$
20. $2\log x - \log(x^2-2x+6) = 0$ Sol: $x = 3$
21. $2\log x^2 - 2\log x = 2$ Sol: $x = 10$
22. $\log x^2 + 1 = \log x^3$ Sol: $x = 10$
23. $\log(1-x) + \log x = 1$ Sol: No tiene solución real
24. $\log x - \log(1-x) = 1$ Sol: $x = \frac{10}{11}$
25. $\log x + 2 = \log x^3$ Sol: $x = 10$
26. $\log(1+x) + \log(1-x) = 2$ Sol: No tiene solución real.
27. $\log(2x+7) - \log(x-1) = \log 5$ Sol: $x = 4$
28. $\log(2x+2) + \log(x+3) = \log 6$ Sol: $x = 0$, $x = -4$
29. $\log x = \log 2 + 2\log(x-3)$ Sol: $x = \frac{9}{2}$; $x = 2$

30. $2 \log x = 2 + \log x$ Sol: $x = 0$; $x = 2$

31. $\log(2x+4) + \log(3x+1) - \log 4 = 2\log(8-x)$ Sol: $x = -42$ $x = 3$

32. $\log_5(x^2 - 9) - \log_5(x + 3) = 1$ Sol: $x = 8$

33. $\log(x + 2) + \log(x + 3) = \log 2$ Sol: $x = -1$

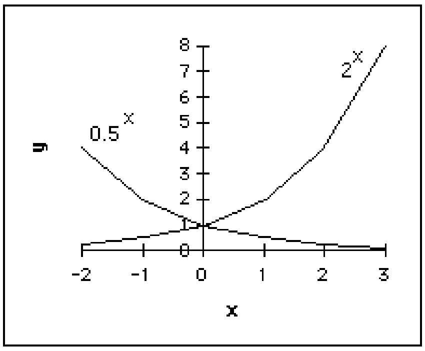
Funciones Trascendentes.

Función exponencial

Una función de la forma $f(x) = a^x$ donde $a > 0$ y a distinto de 1, y x es cualquier número real se denomina función exponencial de base a.

Por ejemplo si $f(x) = 2^x$ y $g(x) = 0.5^x$

x	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	1/4	1/2	1	2	4	8
g(x)	4	2	1	1/2	1/4	1/8



Si $f(x) = a^x$ entonces:

Si a >1 la f(x) es siempre creciente.

Si a >1 cuando $x \to \infty$ entonces $y \to \infty$. Cuando $x \to -\infty$, $y \to 0$

La curva es asintótica respecto del eje x

El dominio de x es $\mathbb{R}$. El codominio es $\mathbb{R}^+$

Ejemplos

$$h(x) = 3^x$$

Obtengamos y grafiquemos:

x	1	1/2	-1/2	0.3	$-\sqrt{4}$	$\sqrt{2}$
h(x)						

Ahora ya podemos responder!!!!!!!!

a) ¿Cuántas raíces en cero tiene una función exponencial?

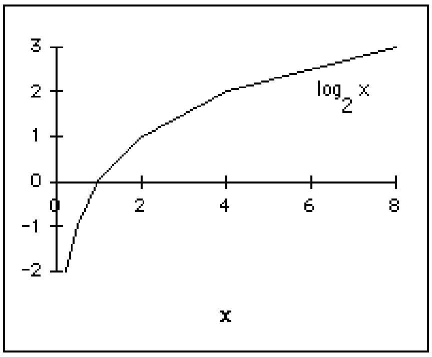
b) ¿Cuál es el dominio de una función exponencial?

c) ¿Cuál es la intersección con el eje de las ordenadas?

d) ¿Cuál es el codominio de una función exponencial?

e) Explique coloquialmente porqué no reviste interés el caso donde a =1

Verifiquemos que dada la función exponencial $f(x) = a^x$, su función inversa es $h(x) = \log_a x$



Páginas WEB recomendadas:
Ejercicios de logaritmo:
https://www.youtube.com/watch?v=4DI9fxsKpTA
https://gauss.acatlan.unam.mx/mod/resource/view.php?id=60

Ecuaciones logarítmicas resueltas:
https://www.youtube.com/watch?v=bFh1YU_GfiQ

Gráfico de funciones logarítmicas avanzadas:
https://www.youtube.com/watch?v=C0vUje9Uduc

Explicación de gráfico de funciones exponencial:
https://www.youtube.com/watch?v=4U4Xd-bZXG8

BIBLIOGRAFÍA

El presente material de estudio ha sido elaborado utilizando transcripciones textuales y/o modificadas de conceptos, definiciones, ejemplos, ejercicios y problemas, de la siguiente bibliografía:

[1.] Berio, Adriana. Matemática I . Puerto de Palos.
[2.] Berio, Adriana. Matemática II . Puerto de Palos.
[3.] Carione, N. y otros. (1995) Matemática – Tomo 3 y 4. Ed. Santillana.
[4] Ernest, F. Haeussler y otros. Matemática . Prentice Hall
[5.] Guzmán y otros. (1987).Matemática M. Ed. Anaya
[6.] Seminario Universitario – UTN – Matemática – Secretaría Académica – Rectorado.
[7.] Smith y otros. (1998). Álgebra y trigonometría. Edit. Addison - Wesley Longman
[8.] Stewart, James y otros. (2004). Precálculo. Ed. Thomson
[9.] Tapia. (1986). Matemática – Tomo 4 . Ed. Estrada

AGRADECIMIENTOS

Nuestro agradecimiento es fundamentalmente:

A las autoridades de la Facultad Regional Córdoba, Universidad Tecnológica Nacional, por permitir plantearnos este desafío en el actual marco y contexto que nos ha interpelado constantemente.

A nuestros colegas, quienes han acompañado esta idea de darle un atisbo de actualización al material y guía para el curso de ingreso en el área de matemática.

A nuestras familias, siempre presentes acompañando y alentando en esta tarea, la de impartir conocimientos tanto disciplinares, como integrales en la adecuación de los jóvenes ingresantes en nuestra querida Casa de Estudios.

ANEXO 1

Símbolos matemáticos de uso frecuente

$=$	igual a	$\wedge$	y
$\neq$	no es igual a	$\vee$	o, en sentido inclusivo
$\cong$	aproximado a	$\underline{\vee}$	o, en sentido exclusivo
$<$	menor que	$\Rightarrow$	implica (condición necesaria)
$\nless$	no es menor que	$\Leftrightarrow$	Implica doblemente(condición necesaria y suficiente)
$>$	mayor que	$\therefore$	Por lo tanto ; en consecuencia
$\ngtr$	no es mayor que	/	Tal que
$\leq$	menor o igual que	$\exists$	Existe
$\geq$	mayor o igual que	$\forall$	Para todo
$\pm$	mas o menos	$\in$	Pertenece
∞	Infinito	$\subseteq$	Incluido en
$\propto$	proporcional a	$\subset$	Incluido estrictamente en
//	paralelo a	$\supseteq$	Incluye a
$\perp$	perpendicular a	$\supset$	Incluye estrictamente a
$\measuredangle$	ángulo	$\cup$	Unión o reunión
⊾	ángulo recto	$\cap$	Intersección

ANEXO 2

"No entre aquí quien no sepa geometría"

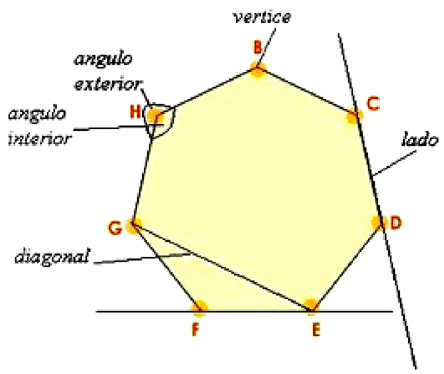
Esta frase se podía leer encima de la puerta de entrada a la Academia de **Platón** (siglo IV a. de C.) donde se reunían a discutir problemas de filosofía, lógica, política, arte, etc. nos da una idea de la importancia que desde antiguo se ha concedido al conocimiento de la Geometría.

Polígonos

Los polígonos son figuras geométricas cerradas, formadas por segmentos, a las que llamamos lados

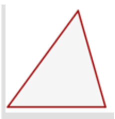
Elementos de un polígono

Lado: es cada uno de los segmentos que conforman el polígono
Vértice: el punto de unión de dos lados consecutivos
Diagonal: segmento que une dos vértices no contiguos
Perímetro: es la suma de todos sus lados
Ángulo interior y ángulo exterior

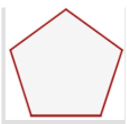


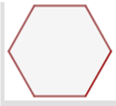
Clasificación de polígonos

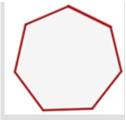
Según el número de lados

 Triángulo: tiene 3 lados

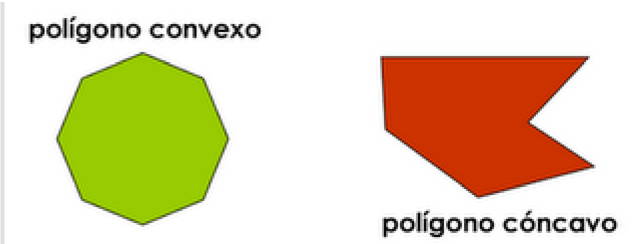
 Cuadrilátero: Tiene 4 lados

 Pentágono: Tiene 5 lados

Hexágono: Tiene 6 lados

Heptágono: Tiene 7 lados

Según su contorno



Convexos

Todos sus ángulos son menores que 180°, todas sus diagonales son interiores

Cóncavos

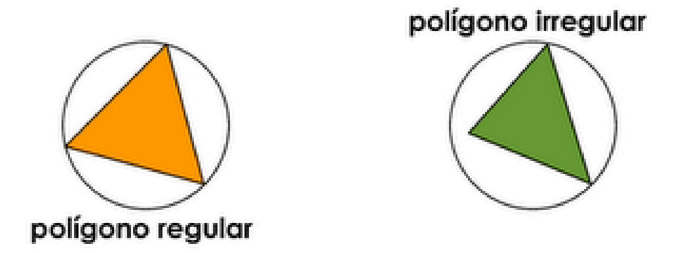
Si un ángulo mide más de 180°, si una de sus diagonales es exterior

Regular

Si tiene sus ángulos y sus lados iguales

Irregular

Si tiene sus ángulos y lados desiguales



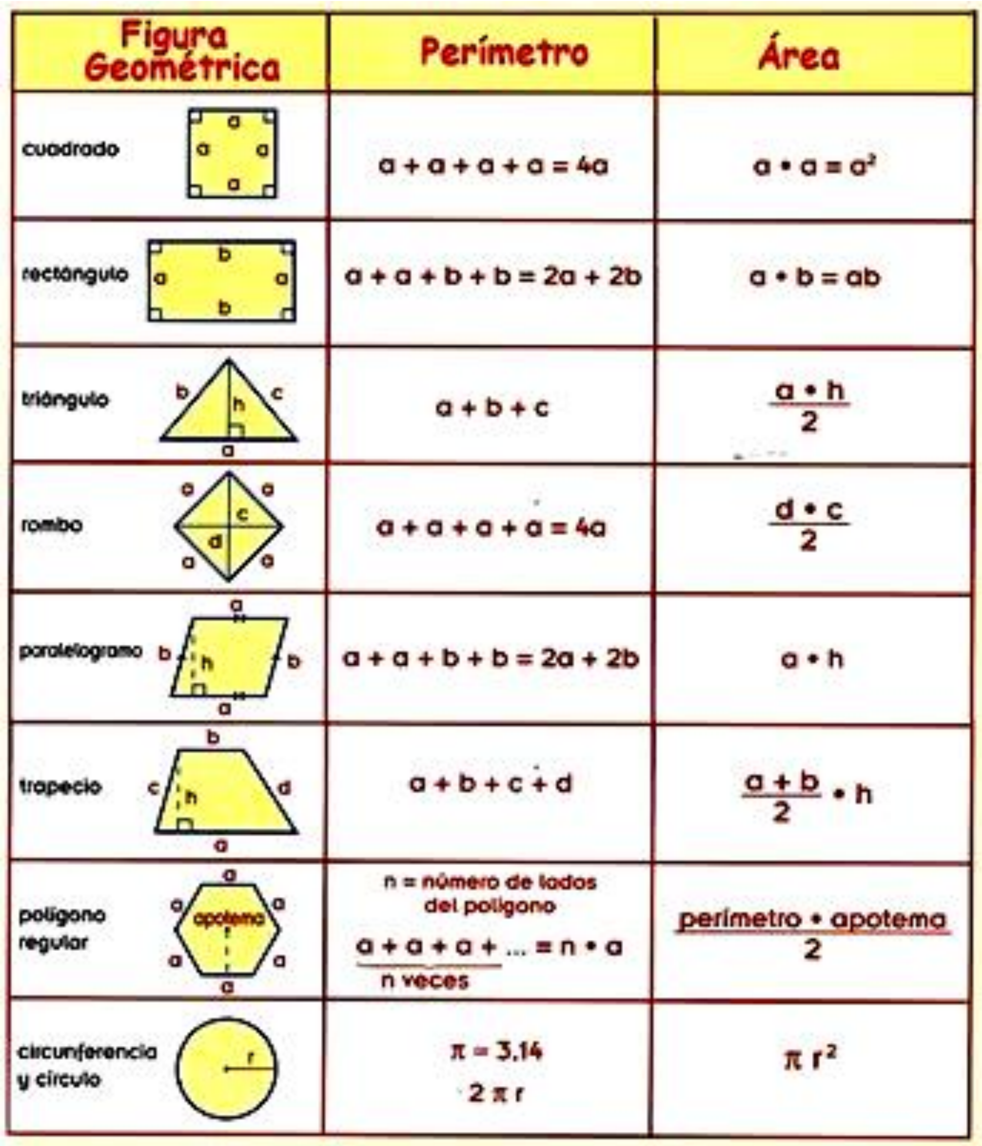
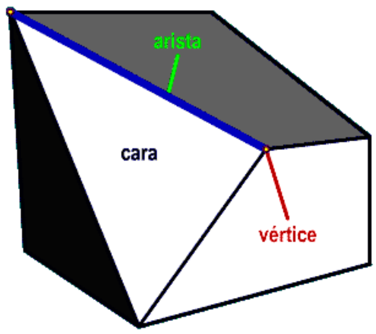


Figura Geométrica	Perímetro	Área
cuadrado	$a + a + a + a = 4a$	$a \cdot a = a^2$
rectángulo	$a + a + b + b = 2a + 2b$	$a \cdot b = ab$
triángulo	$a + b + c$	$\frac{a \cdot h}{2}$
rombo	$a + a + a + a = 4a$	$\frac{d \cdot c}{2}$
paralelogramo	$a + a + b + b = 2a + 2b$	$a \cdot h$
trapecio	$a + b + c + d$	$\frac{a + b}{2} \cdot h$
polígono regular	n = número de lados del polígono $\underbrace{a + a + a + \dots}_{n \text{ veces}} = n \cdot a$	$\frac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2}$
circunferencia y círculo	$\pi = 3{,}14$ $2 \pi r$	πr^2

Los cuerpos geométricos

Se denominan cuerpos geométricos a aquellos elementos que ocupan un volumen en el espacio desarrollándose por lo tanto en las tres dimensiones, limitados por figuras geométricas.

Los segmentos que resultan de la intersección de dos caras, se denominan aristas. Los puntos que resultan de la intersección de las aristas se denominan vértices.



Clases de cuerpos geométricos.

Los **poliedros**: cuerpos geométricos limitados exclusivamente por figuras geométricas planas, llamadas caras; como por ejemplo el cubo

Los **cuerpos redondos**: cuerpos geométricos limitados total o parcialmente por figuras geométricas curvas; como por ejemplo el cilindro, la esfera o el cono.

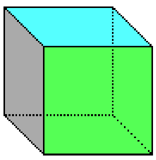
Los **poliedros regulares**: todos sus segmentos y ángulos son iguales entre si, dando por resultado, caras iguales.

Los **poliedros irregulares**: lo definen distintas figuras, como un paralelepípedo (la conocida caja de zapatos).

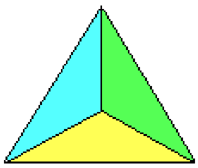
Para la representación gráfica de los cuerpos geométricos en general, se recurre a una técnica de dibujo, la perspectiva, que permite dar la sensación tridimensional.

Los poliedros regulares

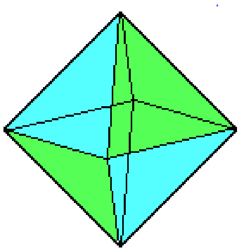
Los poliedros regulares son cinco:


Cubo

- El **cubo** — que está compuesto por seis caras cuadradas; motivo por el cual se le conoce también con el nombre de exaedro regular, (exaedro = cuerpo con 6 caras).


Tetraedro

- El **tetraedro regular** — compuesto por cuatro caras con forma de triángulos equiláteros.

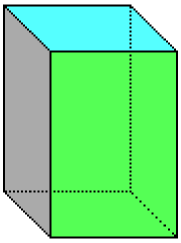

Octaedro

- El **octaedro regular** — compuesto por ocho caras con forma de triángulos equiláteros, en forma de dos pirámides unidas por sus bases.

- El **icosaedro regular** — compuesto por veinte caras con forma de triángulos equiláteros, que tiene un eje plano exagonal.
- El **dodecaedro regular** — compuesto por doce caras con forma de pentágono.

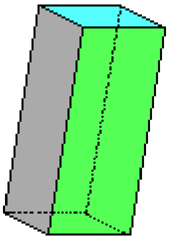
Los principales poliedros irregulares

Los principales poliedros irregulares son:



Prisma de base cuadrada

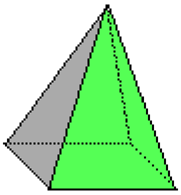
- El **prisma** — que está compuesto por caras laterales rectangulares (que pueden ser cuadradas); y bases con forma de triángulo, cuadrado (salvo cuando las caras también lo son, en cuyo caso es un cubo), pentágono, hexágono u otro polígono regular.



Prisma inclinado

- El **prisma oblicuo** — que es similar al prima, pero con dos lados de forma romboidal; por lo cual solamente puede tener bases cuadradas.

- La **pirámide recta** — compuesto por una base con forma de polígono regular, y lados triangulares cuya base son los lados del polígono, y unen todos sus vértices en un mismo punto, también llamado vértice de la pirámide; el cual se encuentra sobre la perpendicular a la base que pasa por su centro.



Pirámide recta

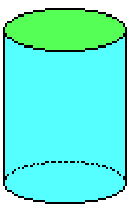
- La **pirámide inclinada** — similar a la anterior, pero cuyo vértice se encuentra sobre una perpendicular a la base que no pasa por su centro.

Los cuerpos redondos

Los cuerpos redondos tienen alguna cara que es una superficie curva.

Hay tres clases principales de cuerpos redondos: el cilindro, la esfera y el cono.

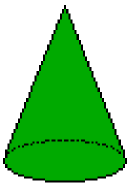
Los principales poliedros redondos



Cilindro

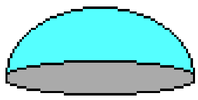
- El **cilindro** — que está compuesto dos bases circulares y una superficie curva continua, equivalente a un rectángulo.

- El **cono** — compuesto por una base circular, y una superficie curva que la rodea y se une en un vértice que se encuentra sobre la perpendicular a la base que pasa por su centro.



Cono

- El cono truncado — que siendo similar a un cono, tiene una base conformada por un plano inclinado, con lo cual adopta una forma de elipse.

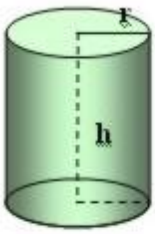
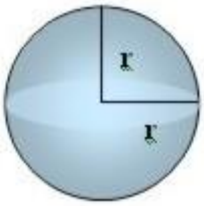
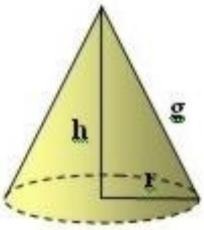
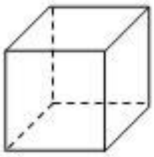
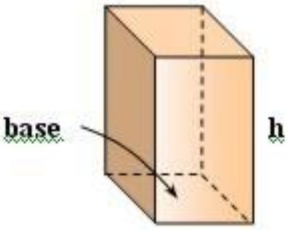
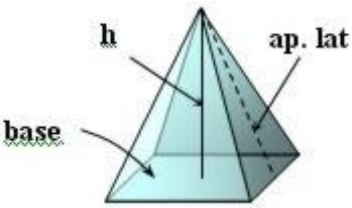


Semiesfera

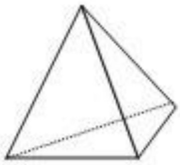
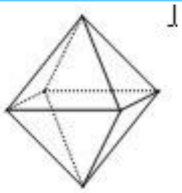
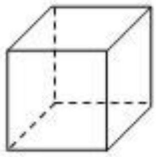
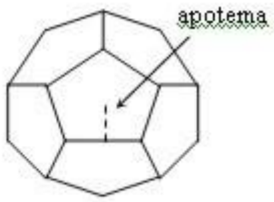
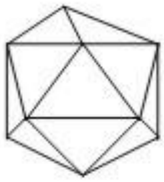
- La **esfera** — que es circular en todos sus planos centrales.

- La **semiesfera** — que es una esfera que ha sido cortada por uno de sus planos circulares, de manera que tiene una base circular y una cúpula esférica.

Fórmulas de área y volumen de cuerpos geométricos

Figura	Esquema	Área	Volumen
Cilindro		$A_{total} = 2\pi r\,(h + r)$	$V = \pi r^2 \cdot h$
Esfera		$A_{total} = 4\pi r^2$	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$
Cono		$A_{total} = \pi r^2 + \pi r g$	$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$
Cubo		**$A = 6\,a^2$**	**$V = a^3$**
Prisma		A = (perim. base • h) + 2 • area base	V = área base • h
Pirámide		$A = \frac{\text{perim.base} \times \text{ap.lat}}{2} +$ $+ \text{area base}$	$V = \frac{\text{area base} \times h}{3}$

Poliedros regulares

Figura	Esquema	Nº de caras	Área
Tetraedro		4 caras, triángulos equiláteros	$A = a^2 \cdot \sqrt{3}$
Octaedro		8 caras, triángulos equiláteros	$A = 2 \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}$
Cubo		6 caras, cuadrados	$A = 6\ a^2$
Dodecaedro		12 caras, pentágonos regulares	$A = 30 \cdot a \cdot ap.$
Icosaedro		20 caras, triángulos equiláteros	$A = 5 \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}$