

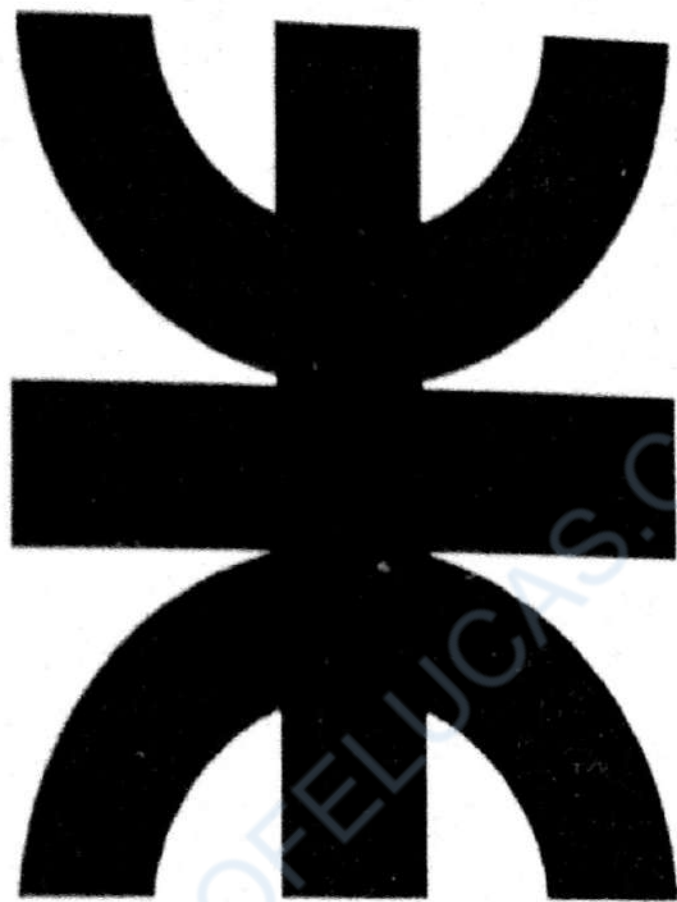
CICLO DE NIVELACIÓN



Física

**UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL CORDOBA**

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL CORDOBA



Secretaria Académica
Dpto. Ciencias Básicas
Coordinación General Ciclo de Nivelación

FÍSICA

FÍSICA

INDICE

	Pág
Introducción.....	4
Objetivos del curso de Física.....	5
Contenidos del curso de física.....	5
Bibliografía complementaria.....	6
Datos del autor.....	6
Unidad 1 Sistemas de unidades	7
Contenido de la unidad.....	7
1.- Definiciones. La Física y su metodología.....	7
Actividad N° 1.....	7
Interacción del hombre con la naturaleza.....	10
2.- Las mediciones. Sistemas de unidades.....	11
3.- El Sistema Internacional. Unidades fundamentales y derivadas.....	12
Tabla I Unidades fundamentales. Sistema Internacional.....	14
Tabla II Unidades derivadas. Sistema Internacional.....	14
4.- Conversión de unidades.....	16
Tabla III Factores de conversión.....	17
Actividad N° 2.....	20
5.- Estrategias recomendadas para encarar la resolución de problemas.....	21
Soluciones de las actividades de proceso de la unidad.....	23
UNIDAD 2 Introducción. Vectores en el plano	25
Contenido de la unidad.....	25
1.- Definición de magnitudes escalares y vectoriales.....	25
Actividad N°3.....	26
2.- Vectores en el plano.....	26
Actividad N° 4.....	27
Igualdad de dos vectores.....	28
Operaciones con vectores.....	29
Suma vectorial.....	29
Propiedades de la suma vectorial.....	30
Sustracción de vectores.....	30
Multiplicación de un vector por un escalar.....	32
Propiedades de la multiplicación de un vector por un número.....	33
Actividad N° 5.....	33
Determinación de la resultante por cálculo.....	33
a) Método trigonométrico.....	33
b) Componentes de un vector. Vectores unitarios o versores.....	35
Actividad N° 6.....	39
3.- Producto escalar. Aplicación a la Física.....	40
Propiedades del producto escalar.....	40
Producto escalar en función de las componentes vectoriales.....	41

Aplicaciones físicas del producto escalar.....	41
Trabajo de una fuerza constante.....	41
Trabajo resultante o neto.....	42
Actividad N° 7.....	44
Actividad N° 8.....	45
Actividad N° 9.....	46
Soluciones de las actividades de proceso de la unidad.....	47
 UNIDAD 3 Estática	53
Contenido de la unidad.....	53
1.- Definición. Partícula en reposo. Concepto de fuerza. Tercera ley de Newton del movimiento.....	53
Actividad N° 10.....	55
2.- Condiciones de equilibrio de una partícula.....	56
Diagrama del cuerpo libre.....	57
3.- Modelización matemática. Método analítico o de las componentes.....	60
Actividad N° 11.....	61
Actividad N° 12.....	62
4.- Nociones sobre equilibrio rotacional.....	63
Actividad N° 13.....	66
Actividad N° 14.....	67
Soluciones de las actividades de proceso de la unidad.....	68
 UNIDAD 4 Cinemática del punto material	79
Contenido de la unidad.....	79
1.- Movimiento y trayectoria. Desplazamiento, velocidad y aceleración. Movimiento rectilíneo uniforme y uniformemente acelerado.....	79
Actividad N° 15.....	83
2.- Modelización matemática: aceleración y frenado uniforme de cuerpos móviles. Caída libre de los cuerpos.....	87
Actividad N° 16.....	89
Actividad N° 17.....	90
Soluciones de las actividades de proceso de la unidad.....	91
 Guía suplementaria de problemas	96
a) Primera parte: Problemas con resultados incluidos.....	96
Unidades. Magnitudes. Conversión de unidades.....	96
Vectores.....	96
Producto escalar. Trabajo de una fuerza.....	97
Cinemática del punto material.....	98
b) Ejercicios adicionales sin la inclusión de resultados (Ejercite su aprendizaje).....	101
 Resumen de las fórmulas empleadas en la guía.....	102
 Apéndice: Notación científica, cifras significativas y consistencia dimensional	104

Contenido.....	104
1.- Notación científica.....	104
Actividad N°18.....	105
2.- Cifras significativas.....	105
Actividad N°19.....	106
Actividad N°20.....	107
3.- Consistencia dimensional.....	107
Actividad N°21.....	108
Soluciones a las actividades de proceso.....	109

FÍSICA

INTRODUCCION

Esta guía de estudios ha sido preparada con el propósito de brindar un material al alumno aspirante a ingresar a la Facultad Regional Córdoba de la Universidad Tecnológica Nacional, para ser utilizado en un estudio personal a distancia o asistiendo a las clases de apoyo en la Facultad y está orientada a adecuar los contenidos abordados en el nivel secundario, con los conocimientos que se requieren para una mejor comprensión de los conceptos que se analizan en asignaturas del primer ciclo de las carreras de ingeniería, en particular la Física.

El contenido considerado para el propósito mencionado, comprende cuatro unidades: Introducción; Vectores, Estática, Cinemática del punto material y Sistemas de unidades (S.I.)

La metodología empleada consiste en proporcionar conceptos e ideas principales, acompañados de ejemplos, preguntas conceptuales y una adecuada ejercitación. Con el objeto de que el estudiante pueda valorar los conocimientos adquiridos, se promueve una profusa ejercitación, la cual está incluida en las actividades de proceso, que contienen los ejercicios propuestos con motivo del desarrollo de un tema y que se encuentran dentro de marcos de doble recuadro. Algunos de los resultados de estas actividades se encuentran desarrollados al final de la unidad. Se recomienda al estudiante responder a todas las preguntas y resolver todos los problemas planteados, incluidos aquellos que no tienen el resultado. Este tipo de ejercitación es importante, ya que cuando se encaran problemas reales, se desconoce la solución y se debe tener confianza en el método empleado. Muchas veces el análisis dimensional o caminos de solución alternativos nos permiten confirmar los valores obtenidos.

Algunas recomendaciones con respecto al manejo de la guía, especialmente para los estudiantes que no concurren a las clases presenciales y deciden realizar un estudio personal a distancia:

- a) Cuando se deba analizar algún tema específico, es conveniente efectuar una primera lectura completa de la sección específica y a continuación una segunda lectura y análisis más cuidadoso del material.
- b) Se debe completar minuciosamente la ejercitación repasando todos los cálculos y verificando los valores. Si se requiere realizar gráficos, éstos deben ser llevados a cabo en forma prolija y utilizando los materiales que se indiquen.
- c) Es muy importante responder a las preguntas que se formulen. Si esto resulta difícil en el primer intento, se aconseja continuar avanzando en la comprensión de los conceptos y probar nuevamente, una vez que la idea se haya aclarado.
- d) Realizar la ejercitación adicional que se presente. Los resultados pueden ser confrontados en la sección de respuestas de la guía o, en caso contrario, deberán utilizarse los métodos que se sugieran para confirmar sus resultados.
- e) Recordar que siempre existe la opción de concurrir a las clases de apoyo.

Objetivos del curso de Física

Con el presente curso de Física se espera que el estudiante alcance los siguientes objetivos:

- Distinguir las diferencias de metodología entre la enseñanza secundaria y la universitaria.
- Adquirir conocimientos básicos que lo capaciten para interpretar los conocimientos científicos y técnicos que se desarrollan en las asignaturas de ingeniería
- Operar básicamente con vectores en el plano
- Interpretar básicamente las leyes del movimiento
- Resolver problemas de uso del Sistema Internacional de Unidades.
- Relacionar el modelo físico con las variables matemáticas

Contenido del curso de Física

Unidad 1: Sistemas de unidades

1. Definiciones: La Física y su metodología.
2. Las mediciones. Sistemas de unidades.
3. El Sistema Internacional. Unidades fundamentales y derivadas
4. Conversión de unidades.
5. Estrategias recomendadas para la resolución de problemas

Unidad 2: Introducción. Vectores en el plano

1. Definición de magnitudes escalares y vectoriales
2. Vectores en el plano: Propiedades de los vectores. Operaciones con vectores: suma, resta, multiplicación por un escalar.
3. Producto escalar. Aplicación a la Física

Unidad 3: Estática

1. Definiciones: partícula en reposo. Primera ley de Newton. Concepto de fuerza. Tercera ley de Newton del movimiento.
2. Condiciones de equilibrio de una partícula. Equilibrio traslacional. Diagrama del cuerpo libre.
3. Modelización matemática: método analítico o de las componentes
4. Nociones sobre el equilibrio rotacional.

Unidad 4: Cinemática del punto material

1. Movimiento y trayectoria. Desplazamiento, velocidad y aceleración. Movimiento rectilíneo uniforme y uniformemente acelerado.
2. Modelización matemática: Aceleración y frenado uniforme de cuerpos móviles. Caída libre de los cuerpos
3. Ejemplos diversos y aplicaciones

Bibliografía complementaria

- TIPPENS, Paul E. *Física Conceptos y Aplicaciones 5ª Edición*. Editorial Mc Graw Hill 1996.
- SERWAY, Raymond A. *Física Tomo I 3ª Edición*. Editorial Mc Graw Hill. 1993.
- TIPLER, Paul. *Física preuniversitaria*. Editorial Reverté. 2 Tomos. Barcelona 1990
- DE JUANA, José M. *Física General I 2ª Edición*. Editorial Alhambra 1985
- SEARS ZEMANSKY YOUNG FREEDMAN, *Física universitaria*. Editorial Pearson Education 12ª Edición México 2009

Datos del autor

La presente guía de estudios ha sido preparada por el Ing. Miguel Ángel Altamirano, para ser utilizada en el curso de Ingreso de Física de la Facultad Regional Córdoba de la Universidad Tecnológica Nacional. Su utilización para otros fines debe ser autorizada por el autor.

Unidad 1: Sistemas de unidades

Contenido de la unidad

1. Definiciones. La Física y su metodología.
2. Las mediciones. Sistemas de unidades.
3. El Sistema Internacional. Unidades fundamentales y derivadas
4. Conversión de unidades.
5. Estrategias recomendadas para la solución de problemas.

1.- Definiciones. La física y su metodología

Comenzamos abordando algunas definiciones principales, en referencia a los procedimientos que usa la física en el estudio de la naturaleza. En primer término mencionamos una definición generalmente aceptada de la Física.

La Física es la ciencia que se ocupa del estudio de los fenómenos físicos, y se entiende como tales a aquellos procesos que ocurren en la naturaleza, en los cuales los componentes de la materia entran en interacción entre sí y sufren transformaciones, pero la esencia de ésta no se ve modificada.

A continuación, aclaramos el significado de algunos términos empleados en esta definición:

Materia es aquello de que están hechos los cuerpos o las sustancias; por procesos, entendemos a los cambios que sufre la materia cuando se producen interacciones o acciones recíprocas entre diferentes cuerpos o sustancias.

Por ejemplo: la deformación de un cuerpo es el cambio en la forma de éste, luego de haber accionado recíprocamente con otro cuerpo; el cambio de estado del agua, de líquido a vapor, es una transformación que ha tenido lugar como consecuencia de un traspaso de energía calorífica desde otro cuerpo al agua. En estos procesos, la materia ha sufrido modificaciones, pero no ha cambiado su esencia: el metal sigue siendo metal, por más que se haya deformado y el agua continúa siendo agua aunque ahora se encuentre en estado gaseoso (vapor). Tales procesos entran dentro de la calificación de fenómenos físicos. Si un trozo de madera se quema, obtenemos cenizas y gases de la combustión, pero ya no hay más madera. De éste se dice que es un fenómeno químico.

Analice los siguientes ejemplos e indique cuáles pueden ser considerados como fenómenos físicos:
a) Movimiento de un vehículo. b) Fusión de un trozo de hierro c) Transmisión de imágenes de televisión d) Envejecimiento de una persona e) Oxidación del hierro f) Explosión de un globo que está siendo inflado g) Digestión de los alimentos h) La lluvia i) El brote de una flor.

Solución N°1

La física está dividida en capítulos o áreas principales:

❖ **Mecánica:** abarca el estudio del movimiento de los cuerpos y las causas que originan este movimiento.

❖ **Termodinámica:** se ocupa de todos aquellos procesos relacionados con el calor, la temperatura y su efecto sobre los cuerpos.

❖ **Electromagnetismo:** estudia los fenómenos de origen eléctrico y magnético, la relación que existe entre ellos y la materia.

❖ **Relatividad:** referida al movimiento de los cuerpos entre sí, a cualquier velocidad, siempre que sea inferior a la rapidez de la luz en el vacío.

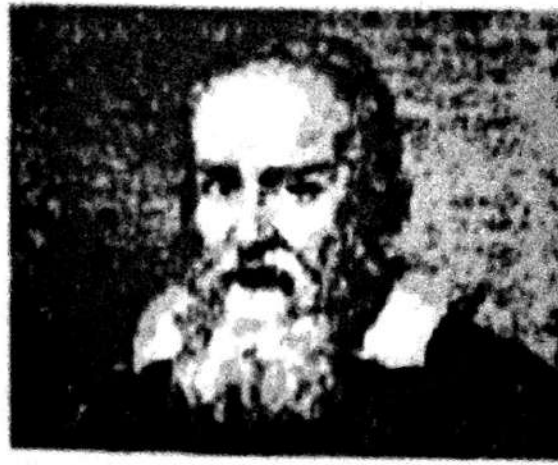
❖ **Mecánica cuántica:** comprende la investigación del comportamiento de las partículas microscópicas o sub-microscópicas, tales como las que forman parte del átomo.

Cuando el examen de estas áreas principales está orientado a determinados sistemas materiales, tenemos otras divisiones, por ejemplo: física molecular, mecánica del cuerpo rígido, física nuclear, etc.

A lo largo de la historia, la física ha ido experimentando una constante evolución. Los griegos la concebían como una ciencia intuitiva, basada en algunas observaciones y la aplicación del sentido común a través de generalizaciones o silogismos. A medida que se fue avanzando en el estudio de la naturaleza, se fue comprobando lo erróneo de esta concepción. Fue Galileo Galilei, quien modificó la concepción antigua de la física y planteó la necesidad de las experiencias para corroborar las hipótesis acerca del comportamiento de la naturaleza.

En su libro, *Discursos y demostraciones sobre dos nuevas ciencias*, que data de 1638, publicó, luego de haber realizado las experiencias correspondientes, que todos los objetos soltados desde una misma altura se precipitan a tierra aproximadamente con la misma rapidez y que, si la experiencia se realizara en el vacío, la velocidad y el tiempo de caída serían iguales, independientemente de la forma y tamaño que tuvieran los cuerpos. Esta posición era totalmente opuesta a la de Aristóteles: el filósofo griego creía que los cuerpos debían caer con una velocidad, tanto mayor cuanto más pesados fueran.

Puede considerarse a Galileo como la persona que impuso la necesidad de las experiencias para corroborar las hipótesis acerca del comportamiento de la naturaleza. Seguidamente Newton, a través de sus célebres leyes del movimiento, completó los estudios de Galileo y estableció las bases de la Mecánica, pero es muy importante el aporte realizado por el gran pensador italiano, ya que ubicó a la física dentro de las ciencias empíricas.



Galileo

Figura 1 Ilustración tomada de "Enciclopedia Microsoft Encarta 98".

En la figura 2 se muestra, en el marco de esta nueva concepción impuesta por Galileo, un esquema que explica la interacción del ser humano con la naturaleza. En esta búsqueda de información de la naturaleza, el hombre elabora conocimientos y, mediante una metodología basada en mediciones, interpreta los fenómenos, enuncia las leyes fundamentales y luego aplica lo aprendido en el ámbito de su vida cotidiana o de su profesión.

WWW.PROFELUCAS.COM

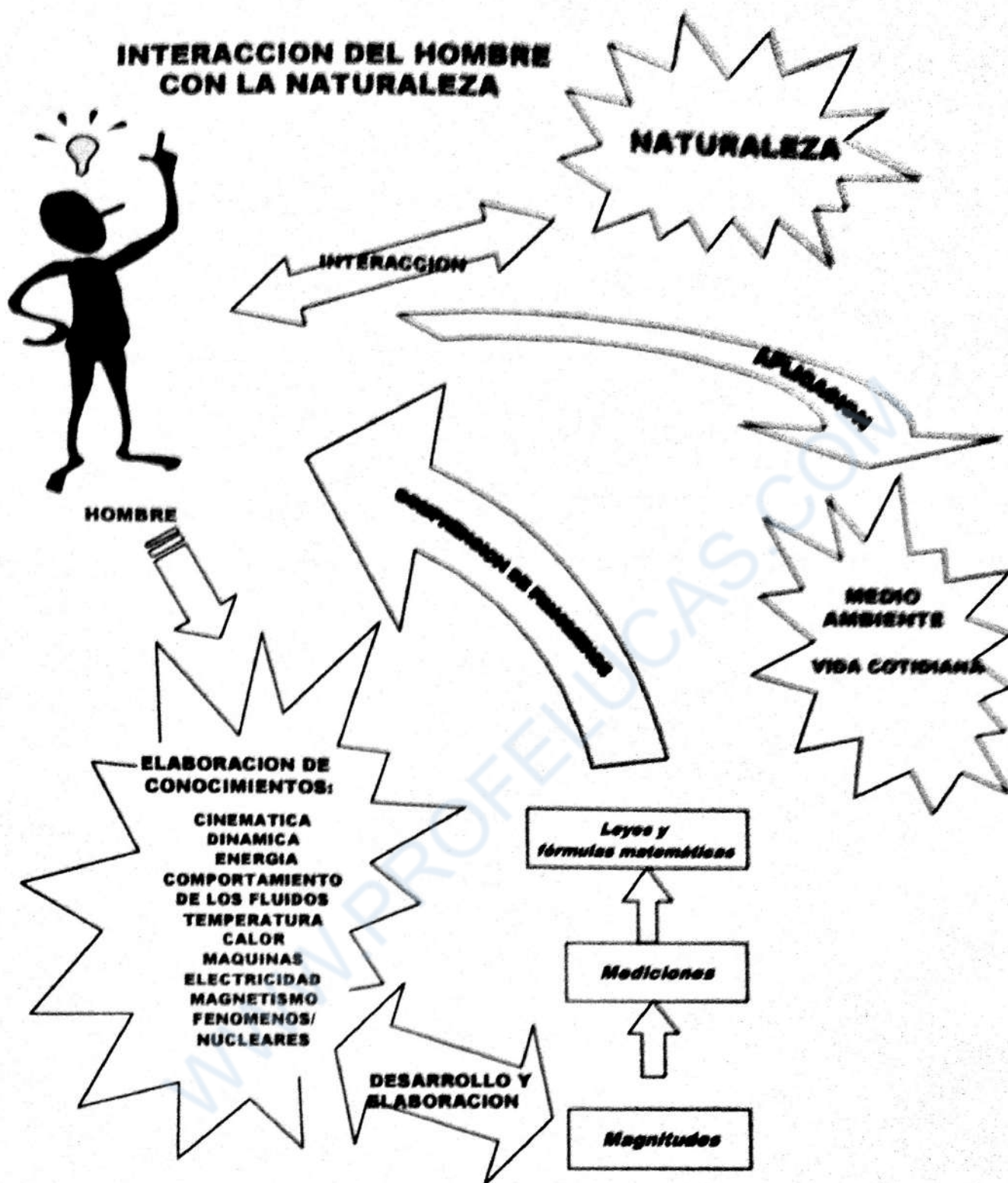


Figura2: Interacción del hombre con la naturaleza

2.- Las mediciones. Sistemas de unidades

La observación o el análisis de un hecho de la naturaleza no siempre son fáciles, ya sea porque lo que estamos observando no ocurre frecuentemente o porque no se dan las condiciones; es por ello que se deben efectuar experimentos para reproducir y también para comprobar la validez de las hipótesis que se formulan. En el curso de este proceso, surge la necesidad de medir.

Según cuenta la tradición, Isaac Newton determinó la ley de la gravitación universal observando la caída de la manzana de un árbol. Para poder obtener precisiones de este fenómeno y comprenderlo, debió reproducirlo tantas veces como fue necesario, obtener datos tales como la altura y el tiempo de caída, forma, tamaño y peso de la manzana, etc. Una vez que interpretó lo que ocurría y enunció la ley, nuevamente necesitó realizar comprobaciones para verificar su validez en diferentes casos prácticos. Todas estas interpretaciones y comprobaciones se realizan por medio del proceso de medición

Una de las principales herramientas que utiliza la física para su estudio, son las mediciones; midiendo obtenemos información sobre una propiedad física. La operación culmina con la obtención de un número que representa a esa medida. Lord Kelvin decía que si se quiere conocer realmente cómo actúa una propiedad física, hay que obtener este número.

La física, para el estudio de la naturaleza, se basa en las mediciones. Cuando medimos, estamos comparando la magnitud a medir con otra de la misma especie empleada como patrón o unidad. De este proceso se obtiene un número que representa la medida.

Por ejemplo:

Para medir el largo o ancho de una habitación utilizamos un metro de albañil o una ruleta: en estos instrumentos de medida está representada, a través de su longitud, la unidad de medida que es el metro. De aquí surge un número que representa la medida. Supongamos 5,3m.

Para medir el tiempo transcurrido utilizamos un reloj: en este aparato está representada la unidad de medida que es el segundo, a través del período de oscilación del volante, en el caso de los relojes a cuerda o del péndulo en el caso de estos últimos tipos: digamos 5 minutos 23 segundos.

En la antigüedad, la definición de las unidades quedaba librada a la voluntad de cada persona que encaraba una medición. Generalmente se utilizaban los miembros del cuerpo, el peso de una persona o elementos de uso cotidiano para medir; de ahí surgieron unidades como el pie, la pulgada, la vara, etc. El comercio obligó a sistematizar y unificar las unidades.

El proceso de la medición incluye los siguientes pasos: a) definir unidades de medida, por ejemplo el metro, el kilogramo, la yarda, la milla o el segundo; b) comparar la magnitud a medir con esta referencia y determinar el número que representa la dimensión e indica cuántas veces está contenida la unidad en esa magnitud.

3. El Sistema Internacional. Unidades fundamentales y derivadas

En 1960, la Conferencia Internacional de Pesas y Medidas estableció el Sistema Internacional, que por Ley N° 19511 del 2 de marzo de 1972, hemos adoptado en nuestro país bajo la denominación SIMELA (Sistema Métrico Legal Argentino).

Se denomina Sistema de Unidades al conjunto constituido por un grupo de unidades denominadas fundamentales, sus múltiplos y submúltiplos y a las combinaciones que de ellas resultan a las que se denomina unidades derivadas

No es necesario que cada magnitud física tenga definida su propia unidad en forma independiente, ya que la gran mayoría se deriva de las cantidades fundamentales. A medida que se van elaborando las leyes físicas, la relación entre estas cantidades básicas permite ir definiendo las magnitudes derivadas. Para toda la mecánica, por ejemplo hay solo tres magnitudes fundamentales que se han adoptado en el sistema internacional: la longitud, la masa y el tiempo. Estas cantidades básicas tienen definidas sus unidades, denominadas unidades fundamentales.

Lo importante para el proceso de medición es que estas unidades puedan ser reproducidas fácilmente a través de los patrones de medida.

Un patrón de medida es un dispositivo que permite reproducir con exactitud la unidad fundamental. El proceso físico empleado en esta reproducción, es determinado por las definiciones de las unidades fundamentales.

Analice detenidamente las unidades fundamentales y derivadas que se muestran en las tablas I y II. Revise en particular las definiciones que se dan para el metro, el kilogramo y el segundo

La definición del metro como unidad de longitud, en función de la distancia recorrida por la luz en el vacío parece complicada. Sin embargo, esta dificultad se ve compensada con gran ventaja en función de dos aspectos que ahora describimos:

a) La velocidad de la luz en el vacío es aceptada como una constante de carácter universal; es invariable, independientemente de que el observador que la determine, esté en reposo o en movimiento. Es en realidad uno de los puntos de referencia que utiliza la Física

b) Por otra parte, es relativamente sencillo montar un dispositivo que permita medir la distancia recorrida por la luz en el tiempo especificado por la definición, máxime teniendo en

cuenta que las mediciones de tiempo son las que pueden hacerse con mayor exactitud. Esto quiere decir que el patrón de longitud puede ser reproducido sin mayores dificultades en el laboratorio de pesas y medidas de cualquier país. De esta forma es fácil controlar, utilizando estos patrones, la exactitud de nuestros aparatos de medición.

En el antiguo Sistema Métrico Decimal al metro se lo definía como la distancia entre dos marcas de una barra de sección especial de una aleación de platino iridio, que estaba depositada en la oficina de pesas y medidas de Sevres, París. Este patrón debía ser mantenido a una temperatura constante para evitar cambios en su longitud por contracción o dilatación térmica. Además requería que todos los países tuvieran patrones primarios similares, a los cuales había que contrastar con esta barra depositada en esta oficina de Francia. Además, ¿qué precisión podía obtenerse de la comparación entre dos marcas de una barra?

Todo patrón de medida, para que sea práctico, debe ser fácilmente reproducible, exacto e invariable

El patrón de tiempo es el segundo y se define en función de un cierto número de oscilaciones atómicas de los átomos de Cesio-133. Al igual que el patrón de longitud, éste también puede reproducirse sin dificultad mediante los actuales relojes atómicos y es sumamente preciso y estable.

El sistema métrico con las unidades fundamentales de longitud, el metro; de masa, el kilogramo y de tiempo, el segundo, se utilizaba bajo la denominación mks anteriormente a la Convención de 1960. Otro sistema, con unidades más pequeñas, denominado cgs (cm-g-s), también ha sido empleado fundamentalmente en países europeos. El sistema técnico emplea unidades del sistema métrico decimal, pero las unidades fundamentales que adopta son la longitud, el metro; la fuerza el kilogramo (kgf) y tiempo, el segundo. En este sistema, la masa es una unidad derivada y se denomina unidad técnica de masa. La equivalencia con el kilogramo del sistema internacional es $1 \text{ utm} = 9,81 \text{ kg}$. Por otra parte, la equivalencia entre la unidad de fuerza del sistema técnico y el newton del sistema internacional es $1 \text{ kgf} = 9,81 \text{ N}$. Durante el desarrollo de Física I, se verá el empleo de estas unidades con más detalle de lo que permite la extensión de este curso de introducción.

Tabla I Unidades Fundamentales – Sistema Internacional

Nombre	Magnitud	Definición
metro (m)	Longitud	Es la distancia recorrida por la luz en el vacío durante 1/299792458 de un segundo (C.G.P.M. 1983)
kilogramo (kg)	Masa	Es la masa de un cilindro de aleación platino - iridio conservado en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas en París (C.G.P.M. 1901)
segundo (s)	Tiempo	Es la duración de 9.192.631.770 ciclos de la radiación especificada del átomo de cesio – 133 (C.G.P.M. 1967)
ampere (A)	Corriente eléctrica	Es la corriente que, si se hace circular por dos conductores rectos paralelos de longitud infinita, cuya sección transversal circular sea despreciable, y separados por un metro en el vacío, produciría entre ellos una fuerza igual a $2 \cdot 10^{-7}$ newton por metro de longitud (C.G.P.M. 1948)
kelvin (K)	Temperatura	Es la fracción 1/273,15 de la temperatura termodinámica del punto triple del agua (C.G.P.M. 1967)
mole (mol)	Cantidad de sustancia	Es la cantidad de sustancia de un sistema que contiene tantas entidades elementales como átomos hay en 0,012kg de carbono – 12 ($6,02 \cdot 10^{23}$) (C.G.P.M. 1971)
candela (cd)	Intensidad luminosa	Es la intensidad luminosa en una dirección dada de una fuente que emite radiación monocromática de 540×10^{12} hertz cuya intensidad energética en esa dirección es de 1/683 watt por esterradián (C.G.P.M. 1979)

Tabla II Unidades Derivadas – Sistema Internacional

Magnitud	Denominación	Símbolo	Equivalencia	Dimensión
Frecuencia	hertz	Hz	s^{-1}	$[T]^{-1}$
Energía	joule	J	$\frac{kg \cdot m^2}{s^2}$	$\frac{[M][L]^2}{[T]^2}$
Fuerza	newton	N	$\frac{kg \cdot m}{s^2}$	$\frac{[M][L]}{[T]^2}$
Presión	pascal	Pa	$\frac{kg}{m \cdot s^2}$	$\frac{[M]}{[L][T]^2}$
Potencia	watt	W	$\frac{kg \cdot m^2}{s^3}$	$\frac{[M][L]^2}{[T]^3}$
Carga eléctrica	coulomb	C	$A \cdot s$	$[I][T]$
Potencial eléctrico	volt	V	$\frac{kg \cdot m^2}{A \cdot s^3}$	$\frac{[M][L]^2}{[I][T]^3}$

Resistencia eléctrica	ohm	Ω	$\frac{kg.m^2}{A^2.s^3}$	$\frac{[M][L]^2}{[I]^2[T]^3}$
Capacitancia	farad	F	$\frac{As^4}{kg.m^2}$	$\frac{[I]^2[T]^4}{[M][L]^2}$
Inductancia	henry	H	$\frac{kg.m^2}{A^2.s^2}$	$\frac{[M][L]^2}{[I]^2[T]^2}$
Campo magnético	tesla	T	$\frac{kg}{As^2}$	$\frac{[M]}{[I][T]^2}$
Velocidad	-	$\frac{m}{s}$	-	$\frac{[L]}{[T]}$
Aceleración	-	$\frac{m}{s^2}$	-	$\frac{[L]}{[T]^2}$
Velocidad angular	-	$\frac{rad}{s}$	s^{-1}	$[T]^{-1}$
Aceleración angular	-	$\frac{rad}{s^2}$	s^{-2}	$[T]^{-2}$
Torque (Momento)	-	N.m	$\frac{kg.m^2}{s^2}$	$\frac{[M][L]^2}{[T]^2}$
Campo eléctrico	-	$\frac{N}{C}$	$\frac{kg.m}{As^3}$	$\frac{[M][L]}{[I][T]^3}$

4.- Conversión de unidades.

Cuando se comparan magnitudes expresadas en unidades diferentes, surge la necesidad de utilizar las conversiones. La tabla III contiene factores de conversión para convertir unidades dentro del sistema métrico, del sistema Inglés, o para pasar unidades de un sistema a otro. Será utilizada en la ejercitación que vamos a hacer. Dentro del sistema métrico se han colocado también unidades del sistema internacional o mks, del sistema cgs y del técnico.

EJEMPLO 1: Poder calorífico del gas

El poder calorífico del gas natural comprimido, en unidades del sistema inglés, es de 1067 btu/pie³. Exprese este valor en kcal/m³.

Respuesta:

En la Tabla III se obtienen los siguientes datos:

1 pie³ equivale a 0,0283 y 1 btu equivale a 0,252Kcal.

Al indicar esta equivalencia queremos decir que 1 pie³ representa el mismo volumen que 0,0283m³ y que 1 btu, la unidad térmica británica, representa el mismo valor de energía calorífica que 0,252 Kcal. Por este motivo, los cocientes $\frac{1\text{pie}^3}{0,0283\text{m}^3}$ y $\frac{1\text{btu}}{0,252\text{Kcal}}$, al igual que

sus recíprocos, $\frac{0,0283\text{m}^3}{1\text{pie}^3}$ y $\frac{0,252\text{Kcal}}{1\text{btu}}$, son iguales a la unidad. En consecuencia podemos multiplicar una cantidad por cualquiera de estos factores sin alterar el significado físico de la misma. Sin embargo debemos multiplicar correctamente para que las unidades no deseadas se eliminen.

Veamos entonces como efectuamos la conversión en este caso:

$$1067\text{btu/pie}^3 = 1067 \frac{\text{btu}}{\text{pie}^3} \times \frac{0,252\text{Kcal}}{1\text{btu}} \times \frac{1\text{pie}^3}{0,0283\text{m}^3} = 9501\text{Kcal/m}^3$$

Las unidades inglesas se cancelan correctamente; si hubiéramos colocado los factores de otra manera, no lo habríamos logrado.

Tabla III Factores de conversión

Magnitud	De		A		Multiplicar por:
	Unidad	Sistema	Unidad	Sistema	
Masa	1g	Métrico	slug	Inglés	$6.85 \cdot 10^{-5}$
	1kg	Métrico	slug	Inglés	$6.85 \cdot 10^{-3}$
	1slug	Inglés	gramo	Métrico	$1.46 \cdot 10^3$
	1 Tonelada métrica (tm)	Métrico	kg	Métrico	1000
Longitud	1cm	Métrico	pulgada	Inglés	0.394
	1cm	Métrico	pie	Inglés	0.0328
	1m	Métrico	pie	Inglés	3.28
	1m	Métrico	pulgada	Inglés	39.36
	1km	Métrico	milla	Inglés	0.62
	1 pulgada	Inglés	cm	Métrico	2.54
	1 pulgada	Inglés	pie	Inglés	0.0833
	1 pie	Inglés	pulgada	Inglés	12
	1 pie	Inglés	cm	Métrico	30.48
	1 yarda	Inglés	m	Métrico	0.9144
	1 milla	Inglés	pie	Inglés	5280
	1 milla	Inglés	metro	Métrico	1609
Área	1cm ²	Métrico	pulgada ²	Inglés	0.1550
	1cm ²	Métrico	pie ²	Inglés	$1.08 \cdot 10^{-3}$
	1m ²	Métrico	pie ²	Inglés	10.76
	1m ²	Métrico	pulgada ²	Inglés	1550
	1 pulgada ²	Inglés	cm ²	Métrico	6.45
	1 pulgada ²	Inglés	pie ²	Inglés	$6.94 \cdot 10^{-4}$
	1 pie ²	Inglés	cm ²	Métrico	929
	1 pie ²	Inglés	pulgada ²	Inglés	144
Volumen/ Capacidad	1cm ³	Métrico	pulgada ³	Inglés	$6.1 \cdot 10^{-5}$
	1cm ³	Métrico	pie ³	Inglés	$3.53 \cdot 10^{-5}$
	1m ³	Métrico	pulgada ³	Inglés	$6.1 \cdot 10^{-4}$
	1m ³	Métrico	pie ³	Inglés	35.3
	1 litro	Métrico	cm ³	Métrico	1000
	1 litro	Métrico	cuarto	Inglés	1.057
	1 litro	Métrico	galón	Inglés	0.264
	1 pulgada ³	Inglés	pie ³	Inglés	$5.79 \cdot 10^{-4}$
	1 pulgada ³	Inglés	cm ³	Métrico	16.4
	1 pie ³	Inglés	pulgada ³	Inglés	1728
	1 pie ³	Inglés	litro	Métrico	28.3
	1 pie ³	Inglés	galón	Inglés	7.48
	1 pie ³	Inglés	m ³	Métrico	0.0283
	1 cuarto	Inglés	cm ³	Métrico	946.35
	1 cuarto	Inglés	pinta	Inglés	2

	1 pinta	Inglés	cm ³	Métrico	473,175
	1 galón	Inglés	cuarto	Inglés	4
	1 galón	Inglés	pulgada ³	Inglés	231
	1 galón	Inglés	litro	Métrico	3,785
Velocidad	1 m/s	Métrico	km/h	Métrico	3,6
	1 m/s	Métrico	pie/s	Inglés	3,28
	1 m/s	Métrico	milla/h	Inglés	2,24
	1 pie/s	Inglés	milla/h	Inglés	0,682
	1 pie/s	Inglés	m/s	Métrico	0,3048
	1 pie/s	Inglés	km/h	Métrico	1,10
	1 km/h	Métrico	m/s	Métrico	0,278
	1 km/h	Métrico	milla/h	Inglés	0,621
	1 km/h	Métrico	pie/s	Inglés	0,911
	1 milla/h	Inglés	pie/s	Inglés	1,467
	1 milla/h	Inglés	m/s	Métrico	0,447
	1 milla/h	Inglés	km/h	Métrico	1,609
Fuerza	1 newton	Métrico	dina	Métrico	10 ⁵
	1 newton	Métrico	libra	Inglés	0,225
	1 dina	Métrico	newton	Métrico	10 ⁻⁵
	1 dina	Métrico	libra	Inglés	2,25.10 ⁻⁶
	1 libra	Inglés	newton	Métrico	4,45
	1 libra	Inglés	dina	Métrico	4,45.10 ⁵
	1 libra	Inglés	kgf	Métrico	0,453
	1 kgf	Métrico	newton	Métrico	9,8
	1 kgf	Métrico	dina	Métrico	9,8.10 ⁵
	1 kgf	Métrico	libra	Inglés	2,205
Angulo	1 radián	-	grado	-	57,3
	1 grado	-	radián	-	0,0175
Energía/ Trabajo	1 joule	Métrico	erg	Métrico	10 ⁷
	1 joule	Métrico	libra.pie	Inglés	0,738
	1 joule	Métrico	kcal.	Métrico	2,39.10 ⁻⁴
	1 joule	Métrico	btu	Inglés	9,48.10 ⁻⁴
	1 kilocaloría	Métrico	joule	Métrico	4185
	1 kilocaloría	Métrico	erg	Métrico	4,185.10 ¹⁰
	1 kilocaloría	Métrico	btu	Inglés	3,968
	1 btu	Inglés	joule	Métrico	1055
	1 btu	Inglés	erg	Métrico	1,055.10 ¹⁰
	1 btu	Inglés	libra.pie	Inglés	778
	1 btu	Inglés	kcal.	Métrico	0,252
	1 libra.pie	Inglés	joule	Inglés	1,36
	1 libra.pie	Inglés	btu	Inglés	1,29.10 ⁻³
	1 kilogrametro	Métrico	joule	Métrico	9,81
	1 kilogrametro	Métrico	btu	Inglés	9,3.10 ⁻³

	1 kilogrametro	Métrico	kcal.	Métrico	$2,34 \cdot 10^{-3}$
Tiempo	1 hora	-	minuto	-	60
	1 hora	-	segundo	-	3600
	1 día	-	hora	-	24
	1 día	-	minuto	-	1440
	1 día	-	segundo	-	86400
	1 año	-	día	-	365
	1 año	-	hora	-	8760
	1 año	-	minuto	-	$5,26 \cdot 10^5$
	1 año	-	segundo	-	$3,16 \cdot 10^7$
	1 watt	Métrico	libra.pie/s	Inglés	0,738
Potencia	1 hp	Inglés	libra.pie/s	Inglés	550
	1 watt	Métrico	btu/h	Inglés	3,41
	1 hp	Inglés	watt	Métrico	745,7
	1 hp	Inglés	btu/h	Inglés	2545
	1 cv	Métrico	kgm	Métrico	75
	1 cv	Métrico	watt	Métrico	735,5
	1 cv	Métrico	hp	Inglés	0,986
	1 cv	Métrico	libra.pie/s	Inglés	542,3

EJEMPLO 2: Aceite lubricante

Una turbina de avión utiliza un aceite sintético que es provisto en latas de 1 pinta. Si la capacidad del tanque de aceite de la turbina es de 12 litros y el consumo de aceite por hora de funcionamiento es de 0,5 litros/h, ¿cuántas latas de aceite deberán preverse para apoyar la operación del avión durante 3,5 horas

Respuesta:

La pinta es una unidad de medida de capacidad de líquidos en el sistema de unidades británico y equivale a 473,175ml ó 0,473175l.

Efectuamos en este caso la conversión de la siguiente manera:

a) En primer término, determinamos la cantidad de aceite que hará falta, en litros:

$$12 \text{ litros} + 0,5 \frac{\text{litros}}{\text{hora}} \times 3,5 \text{ horas} = 13,75 \text{ litros}$$

b) Procedemos ahora a efectuar la conversión:

$$13,75 \text{ litros} \times \frac{1 \text{ pinta}}{0,47315 \text{ litros}} = 29,06 \text{ pintas}$$

Teniendo en cuenta los derrames, inevitables en todo proceso de carga del aceite, deberán preverse 30 latas de aceite sintético.

Realice ahora la siguiente actividad:

2

Realice las siguientes conversiones:

1) Convertir:

a) 8,50 pulg ³	a	cm ³ =	j) 4,72 hp	a	W =
b) 60 millas/h	a	pie/s =	k) 8000btu/h	a	kW =
c) 7,50 millas/h	a	km/h =	l) 52 hp	a	cv =
d) 94 slug	a	kg =	m) 32,17 pie	a	m =
e) 76 km/h	a	m/s =	n) 1 ¼ pulg	a	mm =
f) 488m/s	a	km/h =	o) 7/8 pulg	a	cm =
g) 1830 kg	a	slug =	p) 8700 galones	a	pintas =
h) 455kJ	a	kcal =	q) 1544 l	a	galones =
i) 5,47 btu	a	J =	r) 1,28 m ³	a	cuartos =

Resuelva los siguientes ejercicios

- Calcular en litros el volumen de un cubo de 1 pie de lado
- Un recipiente tiene la forma de un prisma rectangular de 5,5m de ancho por 6,5m de largo y 45,6cm de alto. Calcular la capacidad del recipiente en a) m³, b) litros, c) galones y d) pintas
- La cilindrada del motor de un automóvil es de 302 pulg³. Calcular su valor en a) cm³, b) litros.
- Un galón de pintura cubre 450 pie². Calcular qué área en m² cubre por litro.
- Un automóvil posee un tanque de 15galones de capacidad, con el cual puede viajar una distancia de 500km. Calcular el consumo en a) millas por galón, b) km por litro
- Un terreno posee un área de 1 milla cuadrada y contiene 640 acres. ¿Cuántos metros cuadrados hay en un acre?
- Una lámina de aluminio arrollada tiene 18,0pulgadas de ancho y 25,0pies de largo. Encuentre el área de la superficie que el rollo cubriría en metros cuadrados
- Un vehículo se desplaza a 60 millas/hora de velocidad. Expresé este resultado en pies/s y en yardas/h.
- Entre dos personas miden el largo y el ancho de un dormitorio rectangular. Los datos obtenidos son: 15pie, 8 pulgadas y 3,75m respectivamente. Determine el área del dormitorio en metros cuadrados
- Un vehículo americano recorre 18 millas con un galón de combustible. ¿Cuántos litros consumiría al cabo de 100km de recorrido?
- El precio de una alfombra es de \$70 el m². Si una yarda equivale a 0,9144m, ¿Cuánto costaría una yarda cuadrada de alfombra?
- Un pie equivale a 30,48cm y una pulgada a 2,54cm. En un pie cuadrado, ¿cuántas pulgadas cuadradas hay?
- Un jugador de basket tiene una altura de 6 pies y 10,5 pulgadas ¿Cuál es su altura en centímetros (1pie=12pulg=0,3048m)
- Una caja tiene 0,80m de ancho por 1,20m de largo, por 0,65m de altura.. Encuentre su volumen en a) pulgadas cúbicas y b) pies cúbicos

Solución N°2.

5.-Estrategias recomendadas para encarar la resolución de problemas

La resolución de problemas es un importante paso en el proceso de aprendizaje de la Física, ya que de esta manera podemos aplicar y fijar los conocimientos adquiridos. Durante el cursado regular de la carrera, usted va a desarrollar ampliamente esta capacidad, fundamentalmente durante el desarrollo de las actividades prácticas.

Para tener éxito en este cometido es importante adoptar una metodología adecuada, que debe establecerse previamente, seguir y completar los pasos minuciosamente.

En primer término, debemos tener una real comprensión de los principios y conceptos básicos que se relacionan con el tipo de problema planteado; es decir, usted debe haber leído y comprendido los temas desarrollados. De nada va a valer su intento si usted no ha interpretado correctamente estos conceptos.

El siguiente paso consiste en leer las veces que sea necesario el enunciado del problema hasta entender qué es lo que se pregunta y cuáles son los datos que se proporcionan. Si luego de varias lecturas, usted no logra interpretar el planteo, quizás debería repetir nuevamente el primer paso o efectuar consultas a su profesor. Cuando haya cumplimentado esta etapa, usted será capaz de determinar los fenómenos involucrados y las ecuaciones y leyes que tendrá que aplicar.

Interpretado el problema, en muchas ocasiones encontramos similitudes con otros planteos resueltos con anterioridad. En estos casos puede adoptarse la metodología empleada en dicha oportunidad o bien una parte de ella. Si se trata de un ejercicio resuelto por el profesor en clase, la sola comprensión del trabajo de éste, no garantiza que usted va lograr la solución, a no ser que previamente haya practicado dicha metodología por sus propios medios.

El paso conveniente que viene a continuación, es realizar un esquema del problema mediante dibujos o gráficos que muestren el fenómeno. Muchas veces, el mismo enunciado provee el esquema. Se debe completar el dibujo con todos los datos disponibles y consignar también las incógnitas. En el enunciado se formulan generalmente las hipótesis simplificadoras relacionadas con la resolución. Si estas no están o no se deducen del enunciado, usted deberá plantearlas. A modo de ejemplo citamos: “despreciar la resistencia del aire o el rozamiento entre superficies”; “considerar que la aceleración de la gravedad es constante”, “despreciar las dimensiones del cuerpo y considerarlo solo como un punto”, etc.

A continuación debe plantear las ecuaciones y leyes que va a emplear y seleccionarlás de acuerdo con el número de incógnitas y de datos proporcionados de manera que la resolución sea lo más directa posible. El número de ecuaciones a plantear debe ser compatible con la cantidad de incógnitas a resolver.

Acto seguido, reemplace los datos en las ecuaciones seleccionadas y realice los cálculos para determinar las incógnitas. Especifique además las unidades empleadas y tenga en cuenta las cifras significativas de los datos y de los resultados. El análisis dimensional es una herramienta útil que le ayudará corroborar el resultado: consiste en comprobar que en una

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES DE PROCESO DE LA UNIDAD

1) Fenómenos físicos: a), b), c), f), h) . El resto son fenómenos químicos.

2) 1 Convertir:

a). 139,4 cm³ , b) 88 pie/s , c) 12,07 km/h , d) 1372,4 kg, e) 21,11 m/s,
f) 1756,8 km/h, g) 125,36 kg, h) 108,7 kcal, i) 5770,85 J, j) 3519,7 W,
k) 2,34 kW, l) 52,67 cv, m) 9,81 m, n) 44,45 mm, o) 2,22 cm, p)
69600 pintas, q) 407,9 galones r) 1353,06 cuartos.

2) Volumen del cubo = l^3 . El volumen es de 1 pie³ En la Tabla III encontramos que 1 pie³ = 0,0283 m³. Como 1 m³ = 1000 litros Por lo tanto el resultado en litros es:
 $0,0283 \text{ m}^3 \times 1000 \text{ litros/m}^3 = 28,3 \text{ litros}$

3) a) Volumen = largo x ancho x alto = 5,5m x 6,5m x 0,456m = 16,302 m³.

b) $16,302 \times 1000 = 16302 \text{ litros}$ c) $\frac{16302}{3,785} = 4307 \text{ galones ;}$

d) $4307 \times 8 = 34456 \text{ pintas}$

4) Se denomina cilindrada a la capacidad de los cilindros del motor

$$302 \text{ pulg}^3 = 302 \times 16,4 = 4952,8 \text{ cm}^3 = 4,9528 \text{ litros}$$

5) $450 \text{ pie}^2 = 9,29 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2/\text{pie} \times 450 \text{ pie} = 41,805 \text{ m}^2$

Como 1 galón = 3,785 litros; $41,805 / 3,785 = 11,04 \text{ m}^2$ por litro de pintura.

6) 15 galones = $15 \times 3,785 = 56,775 \text{ litros}$; $500 \text{ km} = 500 / 1,609 = 310,7 \text{ millas}$
 $310,7 / 15 = 20,7 \text{ millas / galón}$; $500 / 56,775 = 8,807 \text{ km / litro}$.

7) Como $1 \text{ milla}^2 = (1609 \text{ m})^2 = 2588881 \text{ m}^2 = 640 \text{ acres}$, Resulta:

$$1 \text{ acre} = \frac{2588881 \text{ m}^2}{1 \text{ milla}^2} \times \frac{1 \text{ milla}^2}{640 \text{ acres}} = 4045 \text{ m}^2$$

8) Resulta: $18 \text{ pulgadas} = 18 \text{ pulgadas} \times \frac{0,0254 \text{ m}}{1 \text{ pulgada}} = 0,4572 \text{ m}$;

$$25 \text{ pies} = 25 \text{ pies} \times \frac{0,3048 \text{ m}}{1 \text{ pie}} = 7,62 \text{ m}$$

$$\text{Área: } 0,4572 \text{ m} \times 7,62 \text{ m} = 3,48 \text{ m}^2$$

$$9) 60 \frac{\text{millas}}{\text{h}} = 60 \frac{\text{millas}}{1 \text{ hora}} \times \frac{5280 \text{ pies}}{1 \text{ milla}} \times \frac{1 \text{ hora}}{3600 \text{ s}} = 88 \text{ pie/s}$$

$$60 \frac{\text{millas}}{\text{h}} = 60 \frac{\text{millas}}{1 \text{ hora}} \times \frac{1609 \text{ m}}{1 \text{ milla}} \times \frac{1 \text{ yarda}}{0,9144 \text{ m}} = 105577 \frac{\text{yardas}}{\text{h}} \approx 1,1 \times 10^5 \frac{\text{yardas}}{\text{h}}$$

$$10) \text{ Largo} = 15 \text{ pies} \times \frac{0,3048 \text{ m}}{1 \text{ pie}} + 8 \text{ pulgadas} \times \frac{0,0254 \text{ m}}{1 \text{ pulgada}} = 4,78 \text{ m}$$

$$\text{Área} = 4,78 \text{ m} \times 3,75 \text{ m} = 17,9 \text{ m}^2$$

$$11) 18 \frac{\text{millas}}{\text{galon}} = 18 \frac{\text{millas}}{1 \text{ galón}} \times \frac{1,609 \text{ km}}{1 \text{ milla}} \times \frac{1 \text{ galón}}{3,785 \text{ litros}} = 7,65 \frac{\text{km}}{\text{litro}}$$

$$\frac{100 \text{ km}}{7,65 \frac{\text{km}}{\text{litro}}} = 13,07 \text{ litros}$$

$$12) 1 \text{ yarda}^2 = \left(\frac{0,9144 \text{ m}}{1 \text{ yarda}} \right)^2 = \frac{0,836 \text{ m}^2}{1 \text{ yarda}^2}$$

$$1m^2 \rightarrow \$70$$

$$0,836 \frac{m^2}{yarda^2} \times \frac{\$70}{1m^2} = \$58,50/yarda^2$$

$$13) 1 pie = 1 pie \times \frac{30,48cm}{1 pie} \times \frac{1 pulgada}{2,54cm} = 12 pulg adas$$

$$1 pie^2 = 12 pulg adas \times 12 pulg adas = 144 pulg adas^2$$

14)

$$6 pies + 10,5 pulg adas = 6 pies \times 30,48 \frac{cm}{1 pulgada} + 10,5 pulg adas \times 2,54 \frac{cm}{1 pulgada} = 209,5cm$$

$$15)a) Ancho = 0,80m \times \frac{1 pulgada}{0,0254m} = 31,5 pulg adas$$

$$Largo = 1,20m \times \frac{1 pulgada}{0,0254m} = 47,2 pulg adas$$

$$Altura = 0,65m \times \frac{1 pulgada}{0,0254m} = 25,6 pulg adas$$

$$Volumen = 31,5 pulg adas \times 47,2 pulg adas \times 25,6 pulg adas = 38062 pulg adas^3$$

$$b) Ancho = 0,80m \times \frac{1 pie}{0,3048m} = 2,62 pies$$

$$Largo = 1,20m \times \frac{1 pie}{0,3048m} = 3,94 pies$$

$$Altura = 0,65m \times \frac{1 pie}{0,3048m} = 2,13 pies$$

$$Volumen = 2,62 pies \times 3,94 pies \times 2,13 pies = 22 pies^3$$

Unidad 2: Introducción; vectores en el plano

Contenido de la unidad

1. Definición de magnitudes escalares y vectoriales
2. Vectores en el plano: Propiedades de los vectores. Operaciones con vectores: suma, resta, multiplicación por un escalar.
3. Producto escalar. Aplicación a la Física

1.- Definición de magnitudes escalares y vectoriales.

Las magnitudes que se utilizan en física tienen dos características diferentes: algunas se definen exclusivamente mediante el número y la unidad de medida, pero otras requieren que también se especifique la dirección y el sentido en que actúan; las primeras se denominan magnitudes escalares y las segundas son las magnitudes vectoriales. Las operaciones que pueden realizarse entre ellas, tienen particularidades que es importante revisar.

Existen ciertas cantidades, denominadas escalares, que quedan perfectamente determinadas mediante el número que da el orden de magnitud y la unidad que especifica la dimensión.

Ejemplos: volumen = 5m^3 ; masa = 3kg .; Temperatura 30° ; Densidad = 1kg/dm^3 ; etc.

Para expresar magnitudes de este tipo, no hace falta especificar nada más que lo que se ha escrito.

En cambio hay otras cantidades que requieren más datos para quedar completamente definidas.

1º) Suponga que es un turista que consulta a un lugareño y éste le dice:

“Se encuentra a 15km de Carlos Paz”; si Ud. quisiera llegar efectivamente a esa ciudad, ¿cree que tendría todo definido con sólo ese dato? Seguramente le preguntaría a esa persona, en qué dirección debe desplazarse y, además, qué sentido debe tomar.

2º) ¿Ha visto que las calles en una ciudad tienen una dirección y sentido de circulación? Ejemplo: “la calle San Martín tiene un sentido de circulación de sur a norte”. Al desplazamiento o movimiento de un vehículo por esa calle se le asigna una dirección y un sentido para que quede especificado en forma completa.

3º) Se dice lo siguiente: “el automóvil se desplazaba a una velocidad de 80km/h ”. En este caso también es necesario indicar una dirección y un sentido; decimos en forma completa: “El automóvil se desplazaba a una velocidad de 80km/h en dirección de norte a sur”.

4º) Ud. obtiene el siguiente dato: “esta estructura está soportando una fuerza de 1.300kg “. La referencia puede ser importante, pero carece de utilidad si no se indica la dirección y sentido en que actúa esa fuerza.

A todas aquellas magnitudes que necesitan de la dirección y el sentido para una especificación completa, se las denomina magnitudes vectoriales.

En los ejemplos hemos mencionado el desplazamiento, la velocidad de un cuerpo y la fuerza aplicada. Todas estas cantidades entran en la clasificación de magnitudes vectoriales.

Aceptado el hecho de que las magnitudes vectoriales necesitan de una dirección y un sentido, surge ahora el problema cuando debemos operar con ellas.

Cuando tenemos que sumar las magnitudes escalares, lo hacemos numéricamente: si el líquido de un recipiente tiene una capacidad de 100 litros y agregamos 20 litros más, tendremos ahora 120 litros en total. Si la masa de un automóvil es de 1000kg. y sube una persona cuya masa es de 80kg., la masa total del vehículo más el conductor será de 1080kg.

Las operaciones con cantidades vectoriales se realizan siguiendo procedimientos geométricos o analíticos. Las magnitudes vectoriales se representan por medio de vectores.

3

Proponga ejemplos de magnitudes vectoriales. Analice cada una de ellas y trate de interpretar por qué necesitan de una dirección y de un sentido.

.....

.....

.....

.....

.....

2.- Vectores en el plano: Propiedades de los vectores. Operaciones con vectores: suma, resta, multiplicación por un escalar.

Las magnitudes vectoriales, se representan mediante vectores. Un vector consiste de un número, que representa la magnitud o módulo, una dirección y un sentido; en determinados problemas físicos, es necesario definir también la recta de acción, que se confunde con la dirección y el punto de aplicación, como se verá.

La dirección puede explicarse en términos de un ángulo respecto a un sistema de referencia (orientación angular) o bien puede tomarse como referencia las direcciones convencionales: norte (N), sur (S), este (E) y oeste (O). Cuando se dice “al norte del este”, se quiere expresar que la dirección forma un cierto ángulo, girando hacia el norte de la dirección este.

Un vector es una flecha orientada en la dirección en que actúa la magnitud. La longitud de esta flecha es proporcional a dicha magnitud

La magnitud del vector se representa mediante la utilización de una escala. Ejemplo: 5m/s equivale a 1cm. Una velocidad de 25m/s estará representada entonces por un vector de 5cm:



Figura 3

El significado de los elementos que definen un vector, son los siguientes:

- Recta de acción: es la recta que contiene al vector.
- Magnitud, módulo o intensidad: indica el valor numérico de la magnitud vector y la unidad de medida; ejemplo para una fuerza: 5N (5 newton)
- Sentido: dado por la flecha del vector
- Punto de aplicación: punto donde se encuentra aplicada la magnitud vectorial.

Los vectores pueden clasificarse como libres, deslizantes o localizados. Un vector libre es aquel que queda determinado solo por su magnitud o módulo, su dirección y su sentido.

Un vector deslizante es aquel que tiene los atributos del vector libre, pero también está definido por su recta de acción. El vector puede deslizarse por esta recta.

El vector está categorizado como localizado, cuando además de los atributos del vector deslizante, está definido también su punto de aplicación

4

- Represente una fuerza de 75N, en una dirección de 45° por encima de la horizontal, utilizando una escala de 10N/cm.
- ¿Qué intensidad tiene una fuerza que ha sido representada por un vector de 7,8 cm de longitud con una escala de 3,5N/cm?
- ¿Qué escala debería utilizar para representar una fuerza de 24N, con un vector cuya longitud sea de 8 cm?

Solución N° 4

Propiedades de los vectores

Igualdad de dos vectores:

a) Dos vectores libres $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son iguales, si tienen la misma magnitud, dirección y sentido, aunque no estén sobre la misma recta de acción.

Decimos que, si los módulos son iguales, actúan con el mismo sentido y sus direcciones son paralelas:

$$\vec{A} = \vec{B}$$

Los puntos de aplicación, por supuesto tampoco son coincidentes, por lo que los vectores pueden deslizarse en sus rectas de acción o trasladarse en forma paralela sin modificar la igualdad.

b) Dos vectores deslizantes son iguales, cuando tienen igual módulo, dirección y comparten la misma recta de acción. Al no estar definido el punto de aplicación, los vectores pueden deslizarse por la recta de acción

c) Dos vectores localizados serán iguales, cuando sean iguales sus magnitudes, dirección, sentido y su punto de aplicación. Un vector localizado, en consecuencia, solo puede ser igual a sí mismo.

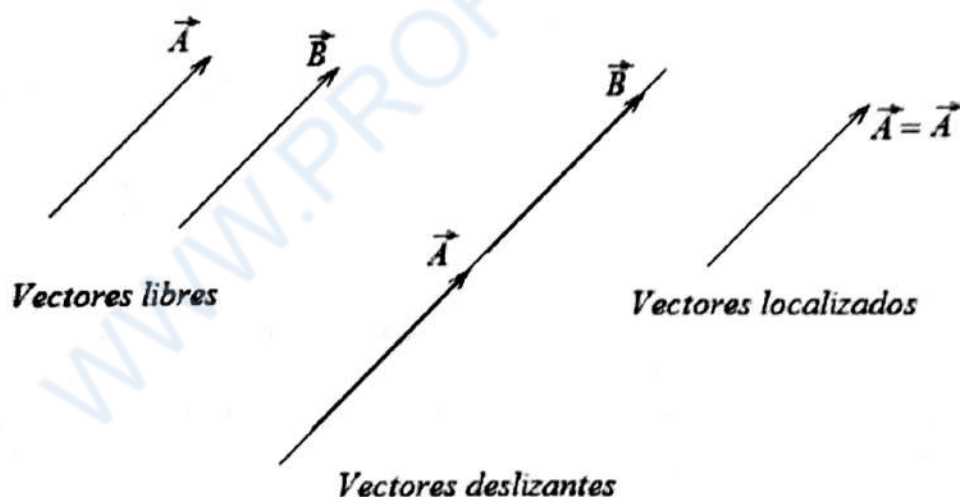


Figura 4. Igualdad de vectores

Una magnitud vectorial, según su naturaleza, puede ser representada por alguna de estas categorías de vectores; en determinadas circunstancias, no obstante, al trasladar el vector sobre su recta de acción (vector deslizante) o desplazarlo en forma paralela (vector libre) los efectos sobre el cuerpo pueden modificarse. Esto ocurre, por ejemplo, cuando fuerzas actúan sobre cuerpos rígidos o deformables

Continuamos describiendo propiedades de los vectores, a medida que definimos las operaciones con vectores

Operaciones con vectores

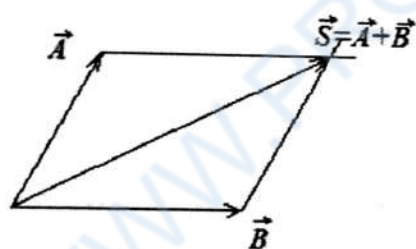
Vamos a estudiar seguidamente como se realizan las operaciones de suma y resta de cantidades vectoriales y la multiplicación de un vector por un número.

Para la adición y sustracción de vectores en forma gráfica, se utilizan las reglas del triángulo, del polígono y del paralelogramo.

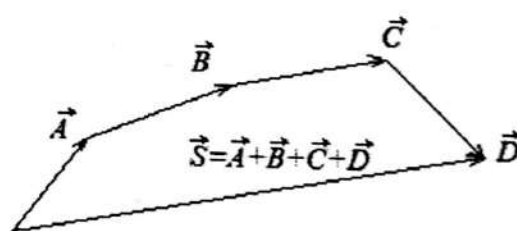
Suma vectorial:

Las reglas del triángulo, del polígono o del paralelogramo son métodos geométricos que se emplean en las operaciones con vectores libres. A través de ellas se obtiene el vector suma.

- 1) La regla del triángulo(o del polígono) establece que para sumar vectores se deben dibujar los vectores, uno a continuación del otro, coincidiendo el extremo de uno con el origen del siguiente. El vector resultante se obtiene uniendo el origen del primer vector con el extremo del último. La construcción del polígono es aplicable cuando se deben componer varias cantidades vectoriales del mismo tipo.
- 2) En el método del paralelogramo, se construye con los vectores y líneas paralelas a estos, un paralelogramo. La diagonal de éste representa la resultante. El método del paralelogramo es utilizado preferente en la suma de dos vectores.
- 3) Obviamente, si los vectores son representativos de cantidades físicas, debemos sumar vectores que representen la misma magnitud. Por ejemplo, la suma vectorial de un desplazamiento con una velocidad, no tiene significado físico.



Paralelogramo



Polígono

Figura 5

Procedimiento para sumar vectores libres por el método del polígono:

1. Elegir una escala para representar los vectores, que sea común a todos ellos.
2. Dibujar a escala el primer vector a sumar con su dirección, magnitud y sentido
3. Dibujar el siguiente vector con su magnitud, dirección y sentido, de manera que el origen coincida con el extremo del primer vector. Continuar el mismo procedimiento con el resto de los vectores.
4. El vector resultante o suma se obtiene uniendo el origen del primer vector con el extremo del último. Utilizando regla y transportador, medir la longitud y la dirección. Mediante la escala elegida, se obtiene la magnitud

Propiedades de la suma vectorial

Escribimos las propiedades de la suma:

a) La suma es conmutativa: $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$

Observe la figura 6a:

La suma de $\vec{A} + \vec{B}$ es el vector $\vec{ac}$. Si sumamos $\vec{B}$ al $\vec{ac}$ obtenemos $\vec{B} + \vec{A} = \vec{bd}$. Como a-b-c-d es un paralelogramo, los lados paralelos son iguales, resultando $\vec{ac} = \vec{bd}$ o, lo que es lo mismo: $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$

b) La suma es asociativa: $(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$ preste ahora atención a la figura 6b:

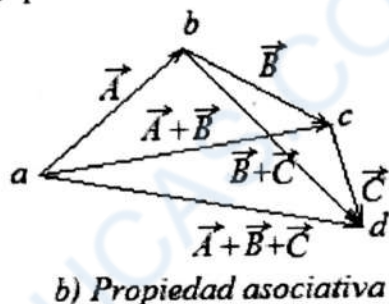
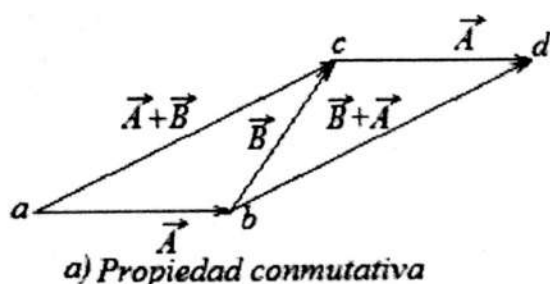


Figura 6

Si son tres los vectores, $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$, dibujamos la poligonal y resultan las siguientes asociaciones:

$$(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{ac} + \vec{C} = \vec{ad}$$

$$\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{a} + \vec{bd} = \vec{ad}$$

$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = \vec{ad}$$

c) Vector nulo $\vec{0}$: Este vector aparece cuando se suman varios vectores, coincidiendo el extremo del último con el origen del primero

d) Vector opuesto o negativo: el opuesto o negativo de un vector es el que satisface la igualdad: $\vec{A} + (-\vec{A}) = \vec{0}$. Si tomamos el extremo de $\vec{A}$ como origen del vector opuesto $(-\vec{A})$, para que la suma $\vec{A} + (-\vec{A})$ sea nula, el extremo del vector $(-\vec{A})$ debe coincidir con el origen de $\vec{A}$. Por este motivo, el vector opuesto a $\vec{A}$ tiene el mismo módulo y dirección que éste, pero sentido contrario.

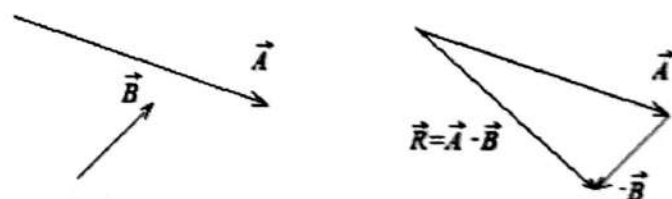
Sustracción de vectores

En determinados problemas físicos, por ejemplo, cuando debe determinarse el cambio de velocidad entre dos puntos de una trayectoria, con el objeto de calcular la aceleración media de un móvil u otros casos que Ud. analizará durante el desarrollo de la asignatura Física

I, cuando curse regularmente, verá que es necesario encontrar la diferencia, resta o sustracción entre dos vectores.

Para restar el vector $\vec{B}$ del vector $\vec{A}$, basta con sumar al vector $\vec{A}$ el opuesto al $\vec{B}$, que se representa por $-\vec{B}$

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$



Resta de vectores

Figura 7

Aplicamos en este caso, los mismos procedimientos gráficos que para la suma entre dos vectores, dibujando el vector que actúa como sustraendo con sentido opuesto.

EJEMPLO 1

Un nadador debe cruzar a nado un río correntoso. La corriente posee una velocidad de 20km/h. El bañista se desplaza en el río en forma transversal a la corriente con una velocidad respecto al agua de 10km/h. Como puede usted deducir, el cruce se realizará realmente en dirección oblicua, pues es arrastrado por la corriente. Vea la ilustración adjunta; ¿cuál es la velocidad resultante?

Respuesta: Si $\vec{AB}$ representa la velocidad del nadador y $\vec{BC}$ la velocidad de la corriente, la velocidad resultante es la hipotenusa del triángulo ABC. Para determinar su valor, aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$V = \sqrt{10^2 + 20^2} = 22,36 \text{ km/h} \approx 22 \text{ km/h}; \quad \text{Ángulo: } \operatorname{tg} \alpha = \frac{20}{10} = 2; \quad \alpha = 63^\circ$$

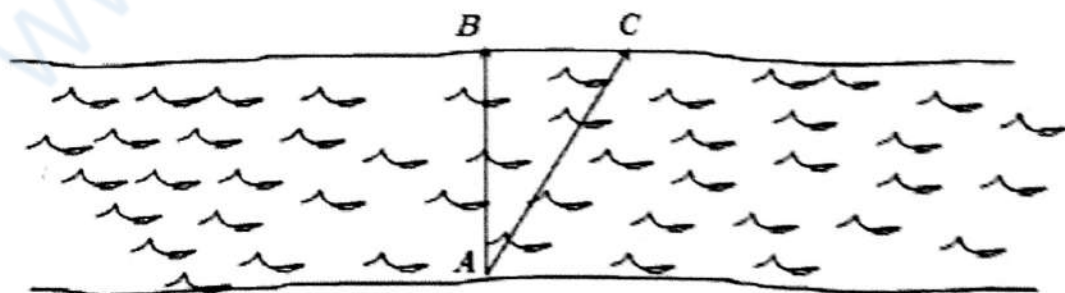


Figura 8

$\vec{AB}$: Dirección a la que apunta el nadador.

$\vec{BC}$: Dirección real, debido al arrastre de la correntada.

EJEMPLO 2

Dos personas tiran de un bloque con fuerzas orientadas en direcciones oblicuas, como se indica en la figura. ¿Cuál es la fuerza resultante sobre el bloque? ¿En qué dirección se mueve el cuerpo?

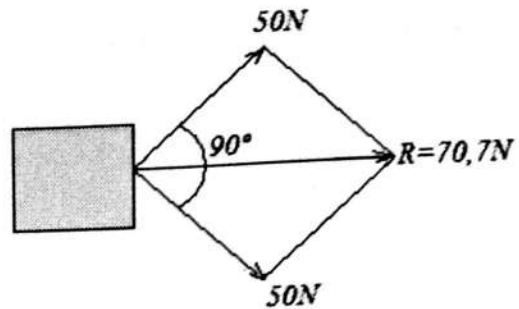


Figura 9

Respuesta:

En este caso construimos el paralelogramo, que resulta ser un cuadrado, dado que las dos fuerzas que se componen son de la misma magnitud. Observe la figura 9. La diagonal del cuadrado es la resultante y vale $R = \sqrt{2} \times 50N = 70,7N$

A la fuerza única que produce el mismo efecto que las fuerzas individuales, simultáneamente aplicadas se la denomina **resultante** o **fuerza neta**

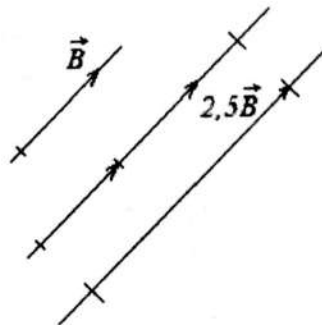
En efecto, si reemplazamos las fuerzas aplicadas por la resultante, el movimiento del cuerpo será exactamente igual. Esto admite comprobación experimental, por esta razón afirmamos:

La operación matemática de adición de vectores se corresponde con la operación física de encontrar la resultante de magnitudes vectoriales

Multiplicación de un vector por un escalar

El vector $a\vec{B}$, en donde a es un número, es un vector que tiene la misma dirección que $\vec{B}$, pero cuya magnitud es a veces mayor. El sentido será el mismo o el opuesto, según que a sea positivo o negativo. En particular, si $a = -1$, el resultado del producto $a\vec{B}$ nos da el opuesto $-\vec{B}$

Supongamos que $a = 2,5$ es multiplicado por el vector velocidad $\vec{B} = 5m/s$. El vector velocidad resultante tendrá la misma dirección y sentido, pero su magnitud será de $12,5m/s$:



Multiplicación de un vector por un número

Figura 10

Propiedades de la multiplicación de un vector por un número

- a) La multiplicación de un vector por un escalar cumple la ley asociativa: $a(b\vec{B}) = (ab)\vec{B}$

La dirección es la misma y, con respecto al sentido, si $ab > 0$ será también el mismo; mientras que si $ab < 0$ el sentido del producto es opuesto al de $\vec{B}$

- b) Propiedad distributiva respecto a la adición de escalares:

$$(a + b)\vec{A} = a\vec{A} + b\vec{A}$$

El vector resultante tiene la misma dirección que $\vec{A}$; en cuanto al sentido, será el mismo, si $a + b > 0$ y será opuesto, si $a + b < 0$

- c) Propiedad distributiva respecto a la adición de vectores:

$$a(\vec{A} + \vec{B}) = a\vec{A} + a\vec{B}$$

- d) Escalar unitario : $a = 1$ es aquel que verifica

$$1\vec{A} = \vec{A}$$

Realicemos a continuación, mayor ejercitación:

5

- a) Un explorador camina 4km hacia el oeste y a continuación 6km hacia el norte. Mediante el método del paralelogramo, determine el desplazamiento resultante del explorador.

- b) Tres fuerzas actúan simultáneamente sobre un cuerpo. $\vec{F}_1 = 300N$, y dirección 30° al norte del este; $\vec{F}_2 = 450N$, con dirección oeste y $\vec{F}_3 = 150N$ en dirección este. Represente las fuerzas con una escala adecuada y determine la resultante por el método del polígono.

- c) Un vector $\vec{A}$ tiene 6 unidades de longitud y apunta hacia el este, mientras que otro $\vec{B}$ tiene 4 unidades de longitud y apunta el sur. Determine gráficamente la magnitud y dirección de los vectores a) $\vec{A} + \vec{B}$ y b) $\vec{A} - \vec{B}$

Solución N° 5

Determinación de la resultante por cálculo

- a) Método trigonométrico

Una opción de cálculo para obtención de la resultante de una suma de dos vectores, consiste en apelar a los métodos trigonométricos de resolución de triángulos rectángulos u oblicuángulos, que Ud. ha visto durante el desarrollo de Matemática.

Si los vectores a sumar forman entre sí un ángulo de 90° , puede en este caso aplicarse el teorema de Pitágoras, que permite calcular la hipotenusa de un triángulo, conociendo sus catetos.

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$$

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} \quad ; \quad \theta = \text{arc.tg} \frac{B}{A}$$

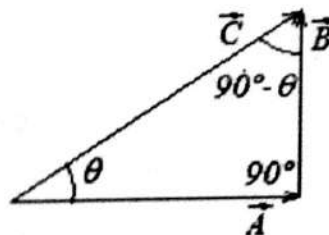


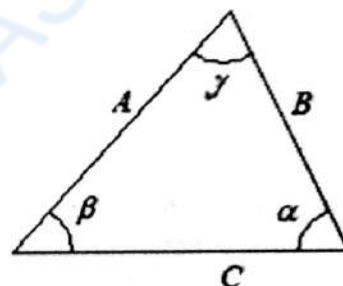
Figura 11

Cuando las fuerzas a componer forman ángulos diferentes de 90° , se pueden aplicar las leyes de los senos y de los cosenos, de los procedimientos de resolución de triángulos oblicuángulos

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Ley de los cosenos

$$\begin{cases} A^2 = B^2 + C^2 - 2BC \cos \alpha \\ B^2 = A^2 + C^2 - 2AC \cos \beta \\ C^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos \gamma \end{cases}$$



Ley de los senos:

$$\frac{A}{\sin \alpha} = \frac{B}{\sin \beta} = \frac{C}{\sin \gamma}$$

Figura 12

EJEMPLO 3

Un caminante se mueve 6km hacia el este y 13km hacia el norte. Determine la magnitud y dirección del desplazamiento resultante, mediante el método trigonométrico

Respuesta:

Dibujamos los vectores y observamos que queda conformado un triángulo rectángulo. Para la determinación de la resultante, podemos aplicar entonces el teorema de Pitágoras.

$$D = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{(6\text{km})^2 + (13\text{km})^2} = 14,3\text{km}$$

En cuanto al ángulo θ respecto a la dirección este es:

$$\theta = \text{arc.tg} \frac{13}{6} = \text{arc.tg} 2,17 = 65^\circ$$

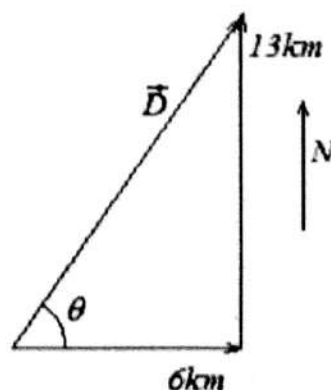


Figura 13

EJEMPLO 4

Un vector $\vec{A}$ mide 6cm de longitud y forma un ángulo de 45° respecto a la horizontal, según puede apreciarse en la figura 14, mientras que $\vec{B}$ mide 3cm y está orientado en dirección horizontal. Determine el vector resultante mediante el método trigonométrico.

Respuesta:

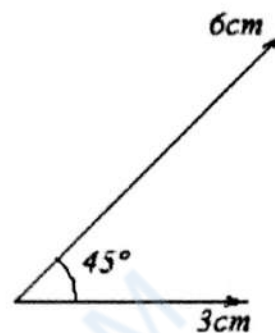


Figura 14

Construimos el paralelogramo que determina la suma de los vectores:

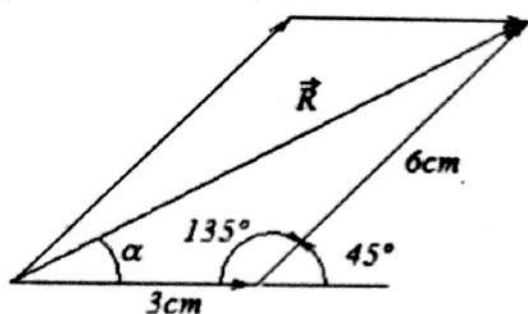


Figura 15

Según puede apreciar en la figura 15, el ángulo interno formado por los dos vectores es de 135° . Por la ley de los cosenos determinamos el módulo de $\vec{R}$:

$$R^2 = (6\text{cm})^2 + (3\text{cm})^2 - 2 \times 6\text{cm} \times 3\text{cm} \times \cos 135^\circ$$

$$R = \sqrt{(6\text{cm})^2 + (3\text{cm})^2 - 2 \times 6\text{cm} \times 3\text{cm} \times (-0,707)} =$$

$$= \sqrt{70,4\text{cm}^2} = 8,4\text{cm}$$

El ángulo se obtiene por la ley de senos:

$$\frac{R}{\text{sen } 135^\circ} = \frac{6\text{cm}}{\text{sen } \alpha}$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{6\text{cm}}{8,4\text{cm}} \cdot \text{sen } 135^\circ = 0,505$$

$$\alpha = \text{arc.sen } 0,505 = 30,4^\circ$$

b) Componentes de un vector. Vectores unitarios o versores

Los métodos gráficos de suma de vectores no son adecuados cuando se requiere una cierta precisión en las determinaciones, mientras que el método trigonométrico puede resultar engorroso cuando se suman más de dos vectores. Una alternativa que puede emplearse es mediante las componentes de un vector.

Se denominan componentes de un vector, según dos direcciones dadas, a las proyecciones del vector respecto a dichas direcciones

En la figura 16 se muestra el vector $\vec{A}$ y dos rectas, respecto a las cuales se quieren obtener las componentes de $\vec{A}$. Las componentes se obtienen trazando desde el extremo del vector, rectas paralelas a cada dirección según se ve en la figura. $\vec{A}_y$ y $\vec{A}_x$ son las componentes vectoriales de $\vec{A}$ en dichas direcciones.

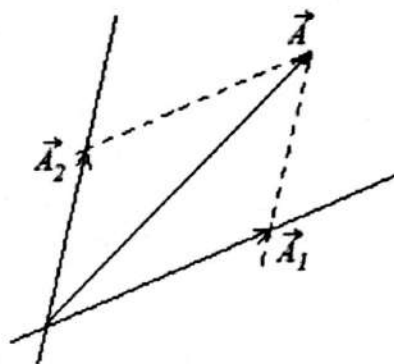
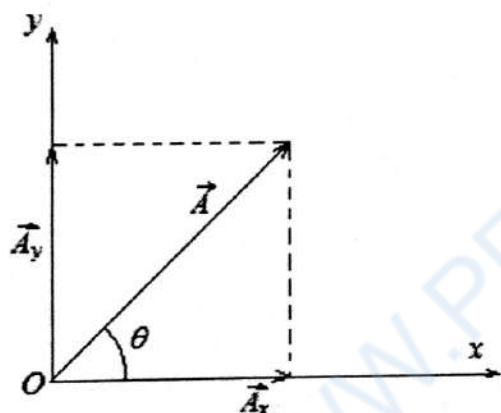


Figura 16

Normalmente se toman dos direcciones perpendiculares entre sí, que determinan los ejes de un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares

El eje horizontal es el eje x o eje de abscisas y el vertical, es el eje y o de ordenadas. El punto donde se cruzan los dos ejes se denomina origen del sistema de coordenadas. La proyección sobre dichos ejes determina las componentes vectoriales $\vec{A}_x$ y $\vec{A}_y$



Puesto que las rectas de proyección y los ejes coordenados forman triángulos rectángulos, las magnitudes de las componentes vectoriales resultan:

$$A_x = A \cos \theta$$

$$A_y = A \sin \theta$$

Se denominan éstas, componentes escalares de A.

Figura 17

La magnitud de $\vec{A}$ está representada por la hipotenusa del triángulo rectángulo, que se obtiene apli-

cando el teorema de Pitágoras:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

Mientras que la dirección respecto al eje horizontal es:

$$\theta = \text{arc.tg} \frac{A_y}{A_x}$$

Las componentes vectoriales se expresan frecuentemente mediante la utilización de los vectores unitarios o versores.

Un vector unitario o versor es un vector sin dimensiones y de longitud unitaria. El versor se emplea para especificar una dirección dada. Se utilizan los símbolos $\vec{i}$ y $\vec{j}$ para denominar los versores que apuntan en las direcciones de los ejes x e y respectivamente.

Supongamos ahora un vector $\vec{A}$ en el plano coordenado x - y . El producto de la componente escalar A_x por el vector $\vec{i}$ es el vector $\vec{A}_x = A_x \cdot \vec{i}$ paralelo al eje x , con magnitud A_x . De la misma manera, $\vec{A}_y = A_y \cdot \vec{j}$ representa al vector paralelo al eje y y de magnitud A_y .

El vector $\vec{A}$ resulta entonces:

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y = A_x \cdot \vec{i} + A_y \cdot \vec{j}$$

Los vectores $\vec{A}_x = A_x \cdot \vec{i}$ y $\vec{A}_y = A_y \cdot \vec{j}$ son las componentes vectoriales de $\vec{A}$ y no deben confundirse con A_x y A_y , las componentes escalares de $\vec{A}$. A lo largo del desarrollo de esta guía, vamos a referirnos en general a las componentes. Para comprobar si nos referimos a componentes vectoriales o escalares, Ud. deberá observar si dicha componente posee o no la simbología de vector.

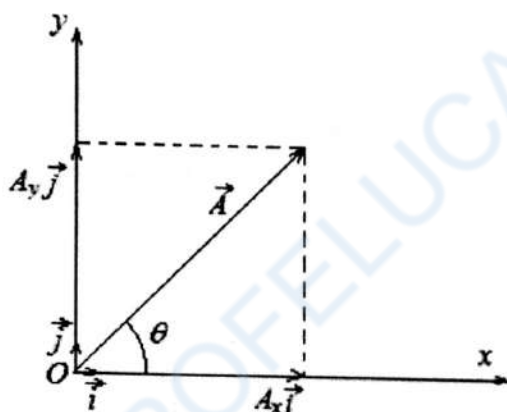


Figura 18

Veamos a continuación como se aplican estos conceptos para sumar dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$:
Se desea sumar los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, cuyas componentes son A_x, A_y y B_x, B_y respectivamente.

El procedimiento para obtener la suma consiste simplemente en sumar las componentes x e y por separado. El vector resultante $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$ es:

$$\vec{R} = (A_x + B_x) \vec{i} + (A_y + B_y) \vec{j} = \vec{R}_x + \vec{R}_y$$

Entonces, las componentes rectangulares de la resultante tienen por magnitud:

$$R_x = A_x + B_x$$

$$R_y = A_y + B_y$$

La magnitud de $\vec{R}$ y el ángulo que forma con respecto al eje $+x$ vale:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(A_x + B_x)^2 + (A_y + B_y)^2}$$

$$\tan \theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{A_y + B_y}{A_x + B_x}$$

La validez de estas expresiones es comprobable mediante la construcción geométrica de la figura 19

Recuerde que los signos de las componentes pueden modificar los sentidos de las componentes vectoriales.

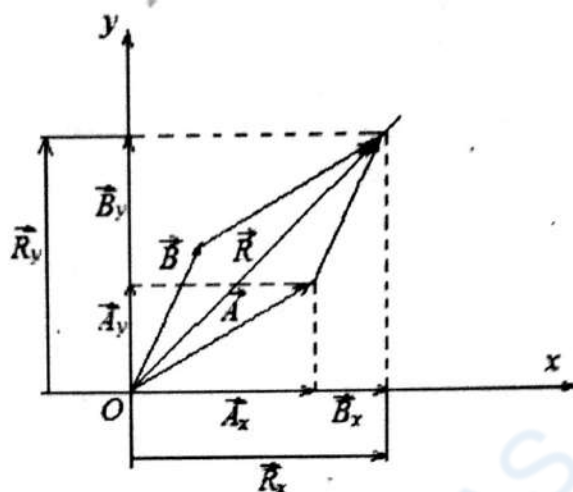


Figura 19

Procedimiento para sumar vectorialmente por el método de las componentes del vector:

1. Trazar el sistema de coordenadas x-y y dibujar en él los vectores.
2. Determinar las componentes x e y de todos los vectores
3. Determinar las componentes de la resultante sumando algebraicamente las componentes x por un lado y las componentes y por el otro.
4. Mediante el teorema de Pitágoras se calcula la magnitud de la resultante y la relación trigonométrica de la tangente u otras, permitirá obtener su ángulo respecto al eje +x.

EJEMPLO 5

Los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ tienen componentes $A_x = -6\text{cm}$, $A_y = 3\text{cm}$ y $B_x = 9\text{cm}$, $B_y = -5\text{cm}$.

Determinar las componentes de los vectores a) $\vec{A} + \vec{B}$, b) $\vec{B} - \vec{A}$, y c) $3\vec{B} + 2\vec{A}$

Respuesta:

$$\text{a) } \vec{R} = \vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\vec{i} + (A_y + B_y)\vec{j} = (-6\text{cm} + 9\text{cm})\vec{i} + (3\text{cm} - 5\text{cm})\vec{j} = 3\text{cm}\vec{i} - 2\text{cm}\vec{j}$$

$$R = \sqrt{(3\text{cm})^2 + (-2\text{cm})^2} = 3,6\text{cm}$$

$$\theta = \text{arc.tg} \frac{R_y}{R_x} = \text{arc.tg} \frac{-2}{3} = -34^\circ$$

Como la resultante está en el cuarto cuadrante, el ángulo de $\vec{R}$ respecto al eje +x es:

$$360^\circ - 34^\circ = 326^\circ$$

$$\text{b) } \vec{R} = \vec{B} - \vec{A} = (B_x - A_x)\vec{i} + (B_y - A_y)\vec{j} = [9\text{cm} - (-6\text{cm})]\vec{i} + (-5\text{cm} - 3\text{cm})\vec{j} = 15\text{cm}\vec{i} - 8\text{cm}\vec{j}$$

$$R = \sqrt{(15\text{cm})^2 + (-8\text{cm})^2} = 17\text{cm}$$

$$\theta = \text{arc.tg} \frac{-8}{15} = -28^\circ$$

El ángulo respecto al eje +x es:

$$360^\circ - 28^\circ = 332^\circ$$

c) $\vec{R} = 3\vec{B} + 2\vec{A}$

En este caso, los vectores están multiplicados por escalares. Cada vector mantiene su dirección y sentido pero sus módulos están multiplicados por escalares positivos.

Resulta lo siguiente:

$$\begin{aligned} R &= 3B + 2A = 3(B_x\vec{i} + B_y\vec{j}) + 2(A_x\vec{i} + A_y\vec{j}) = (3B_x\vec{i} + 3B_y\vec{j}) + (2A_x\vec{i} + 2A_y\vec{j}) = \\ &= (3B_x + 2A_x)\vec{i} + (3B_y + 2A_y)\vec{j} = [(3 \times 9\text{cm} + 2(-6\text{cm}))]\vec{i} + [3(-5\text{cm}) + 2 \times 3\text{cm}] = \\ &= 15\text{cm}\vec{i} - 9\text{cm}\vec{j} \end{aligned}$$

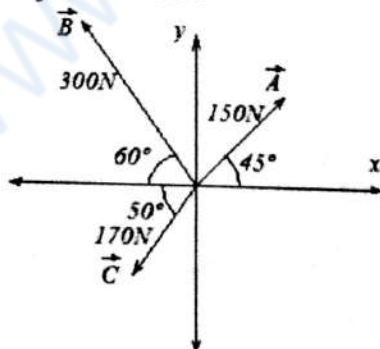
$$R = \sqrt{(15\text{cm})^2 + (-9\text{cm})^2} = 17,5\text{cm}$$

$$\theta = \text{arc.tg} \frac{-9}{15} = -31^\circ$$

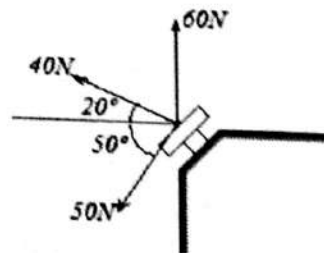
Realice ahora la ejercitación N°6. Utilice el método de las componentes del vector

6

- Determine la resultante de las fuerzas de la figura.
- Calcule la resultante de las siguientes fuerzas 220N, 60°; 125N, 210° 175N, 340°.
- Un semáforo está atado a la parte media de una cuerda, de modo que cada segmento forma un ángulo de 10° con la horizontal. La fuerza resultante es cero. ¿Cuál es el peso del semáforo; si la tensión en cada segmento de cuerda es de 200N?
- a) Determine la resultante $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$ para las siguientes fuerzas, con $\vec{A} = 500\text{N}$ sur y $\vec{B} = 270\text{N}$ oeste. b) Encuentre el vector diferencia $\vec{R} = \vec{A} - \vec{B}$
- Determine la fuerza resultante sobre el tornillo de la figura.
- Un participante que interviene en una competencia de búsqueda del tesoro, se desplaza 25m hacia el norte; a continuación se mueve hacia el este una distancia de 45m y finalmente camina 38m en una dirección de 30° respecto al este. ¿Cuál es el desplazamiento total en magnitud y dirección?



Problema a)



Problema e)

Solución N° 6

3.- Producto escalar. Aplicación a la Física

Los vectores pueden multiplicarse entre sí. Existen dos tipos de productos entre vectores: el producto escalar y el vectorial. Durante el presente curso nos vamos a abocar al producto escalar, mientras que el producto vectorial será abordado durante el desarrollo de la asignatura Física I

El producto escalar entre vectores tiene múltiples aplicaciones en muchos capítulos de la Física, especialmente en Mecánica y en la teoría del campo electromagnético. Haremos ahora una breve alusión al trabajo de una fuerza, como una aplicación física de este concepto. Ud. ampliará esta base, durante el desarrollo de la Física y de las asignaturas técnicas, en función de la carrera que haya elegido.

El producto escalar entre dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se define como una cantidad escalar igual al producto de las magnitudes de los dos vectores y el coseno del ángulo θ comprendido entre las direcciones de $\vec{A}$ y de $\vec{B}$. No es necesario que $\vec{A}$ y $\vec{B}$ tengan las mismas unidades

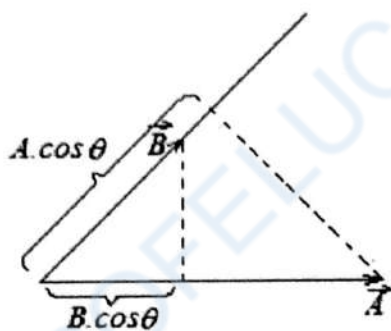


Figura 20

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta$$

El producto escalar resulta igual al producto entre el módulo de un vector y la proyección del segundo vector sobre la dirección del primero. Le quedará claro el concepto si observa cuidadosamente la figura 20. Siempre resulta:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A \times \text{proyección } \vec{B}_A = B \times \text{proyección } \vec{A}_B$$

Propiedades del producto escalar

a) El producto escalar cumple la propiedad conmutativa:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

b) El producto escalar es asociativo con respecto a la multiplicación por un escalar:

$$(a\vec{A}) \cdot \vec{B} = a(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot (a\vec{B})$$

c) El producto escalar cumple con la propiedad distributiva para la suma de vectores:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$$

Casos particulares

a) Si los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ tienen la misma dirección y sentido ($\theta=0^\circ$):

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB$$

b) Si los vectores tienen la misma dirección pero sus sentidos son opuestos ($\theta=180^\circ$)

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = -AB$$

c) El producto escalar es negativo siempre que:

$$90^\circ < \theta < 180^\circ$$

d) El producto escalar es nulo si los vectores son perpendiculares entre sí ($\theta = 90^\circ$):

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$$

Recuerde que $\cos 90^\circ = 0$.

Producto escalar en función de las componentes vectoriales

Supongamos que los vectores $\vec{A}(A_x, A_y)$ y $\vec{B}(B_x, B_y)$ se multiplican escalarmente entre sí:

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot \vec{B} &= (A_x \vec{i} + A_y \vec{j}) \cdot (B_x \vec{i} + B_y \vec{j}) = \\ &= A_x B_x \vec{i} \cdot \vec{i} + A_x B_y \vec{i} \cdot \vec{j} + A_y B_x \vec{j} \cdot \vec{i} + A_y B_y \vec{j} \cdot \vec{j}\end{aligned}$$

Pero los productos escalares de los versores valen:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = 1$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$$

Observe que en la segunda fórmula, $\vec{i}$ y $\vec{j}$ son perpendiculares entre sí.

Por lo tanto:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y$$

Si los vectores son iguales, es decir:

$$\vec{A} = \vec{B}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x^2 + B_y^2 = |\vec{A}|^2 = A^2$$

Aplicaciones físicas del producto escalar

Trabajo de una fuerza constante:

La fuerza que actúa sobre un cuerpo es una cantidad vectorial, al igual que el desplazamiento que sufre dicho cuerpo. El desplazamiento del cuerpo puede ser causado por la fuerza o bien esta última podría modificar dicho desplazamiento

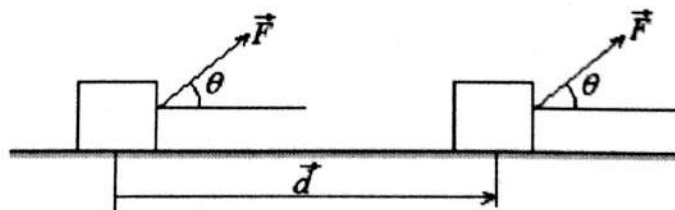


Figura 21

Se denomina trabajo de una fuerza constante al producto escalar de la fuerza por el desplazamiento

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = Fd \cos \theta$$

Como el trabajo es el resultado del producto escalar de dos vectores, es una magnitud escalar. En el Sistema Internacional se mide en joules (J)

1joule (1J) es el trabajo realizado por una fuerza de un newton al mover un objeto a través de una distancia paralela de un metro

Se cumplen con esta magnitud, todas las propiedades del producto escalar anteriormente vistas. El trabajo será nulo si la fuerza y el desplazamiento son perpendiculares entre sí y tampoco hay trabajo si actúa la fuerza, pero el cuerpo no se desplaza.

El trabajo es una magnitud física muy importante, pues está íntimamente relacionado con la energía de un cuerpo o sistema. Todo esto será analizado minuciosamente durante el cursado de Física I.

Trabajo resultante o neto

Cuando varias fuerzas actúan sobre un mismo cuerpo y este sufre un desplazamiento, hay trabajo resultante o neto que será la suma algebraica de los trabajos de las fuerzas individuales. Se cumplen aquí la propiedad distributiva para la suma de vectores y la propiedad asociativa, vistas anteriormente:

Si varias fuerzas actúan sobre el cuerpo que se desplaza, cada fuerza determinará un trabajo individual. Sean varias las fuerzas $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots$ que actúan sobre el cuerpo, siendo $\vec{d}$ el desplazamiento del cuerpo. Para cada una de ellas podemos determinar un trabajo

$$W_1 = \vec{F}_1 \cdot \vec{d}$$

$$W_2 = \vec{F}_2 \cdot \vec{d}$$

$$W_3 = \vec{F}_3 \cdot \vec{d}$$

El trabajo resultante neto será la suma algebraica de los trabajos individuales:

$$W_{\text{neto}} = W_1 + W_2 + W_3 + \dots = \vec{F}_1 \cdot \vec{d} + \vec{F}_2 \cdot \vec{d} + \vec{F}_3 \cdot \vec{d} + \dots = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots) \cdot \vec{d}$$

Por las propiedades asociativa y distributiva, el trabajo neto es también igual al trabajo de la resultante de las fuerzas por el desplazamiento

Tenga en cuenta que en función de los ángulos formados por las fuerzas y el desplazamiento, algunos de los trabajos $W_1, W_2, W_3, \dots$ pueden ser negativos, por eso hablamos de suma algebraica de trabajos individuales.

En un sistema de coordenadas x-y, en donde $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j}$ y el desplazamiento resulta $\vec{d} = d_x \vec{i} + d_y \vec{j}$, el trabajo resulta igual a:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = F_x d_x + F_y d_y$$

EJEMPLO 6 Una joven empuja una cortadora de césped con una fuerza $\vec{F} = 50N$, que forma un ángulo de $\theta = 37^\circ$, como se muestra en la figura 21. Si la cortadora se desplaza una distancia $d = 7,5m$, calcule el trabajo realizado por la joven

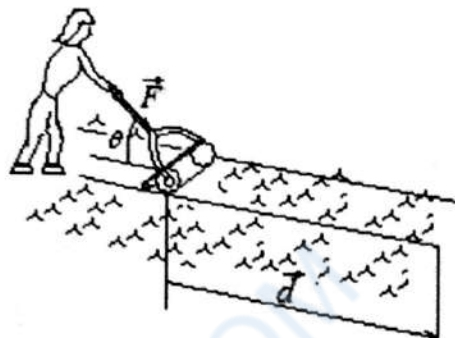


Figura 22

Respuesta:

El trabajo realizado por la joven sobre la cortadora de pasto es:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = Fd \cos 37^\circ = 50N \times 7,5m \times 0.8 = 300J$$

Realizamos a continuación la siguiente ejercitación, sobre producto escalar y trabajo de una fuerza constante

Con esto damos por completada la Unidad 2. Realizamos ahora una ejercitación general sobre vectores y trabajo de una fuerza. Aplique la metodología de resolución más conveniente de acuerdo a lo que ha aprendido. Encontrará los resultados en el apartado "Soluciones a las actividades de proceso" al final de esta unidad:

a) Dos vectores tienen las siguientes características: tiene su componente x de una longitud de 4 unidades en la dirección $+x$ y su componente y es de 5 unidades y está orientada en la dirección $+y$. El vector en cambio, tiene una componente x de 2 unidades en la dirección $-x$ y una componente y de 3 unidades en la dirección $+y$. Encuentre a) El producto escalar $\vec{A} \cdot \vec{B}$ y b) el ángulo entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$

b) Para los tres vectores $\vec{A} = 4\vec{i} + 5\vec{j}$; $\vec{B} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$ y $\vec{C} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$, encuentre el siguiente producto: $\vec{C} \cdot (\vec{A} - \vec{B})$

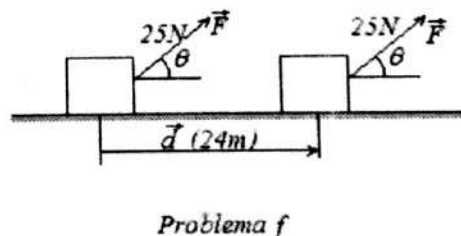
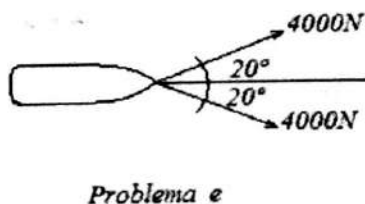
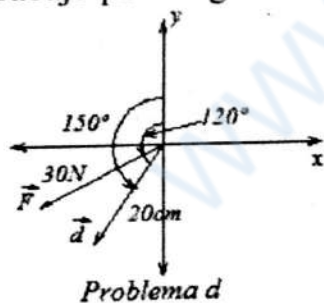
c) Un vector tiene 2 unidades de longitud y apunta en la dirección positiva del eje y de un sistema coordenado $x-y$. Un vector tiene una componente x negativa de 5 unidades de longitud y una componente y positiva de 3 unidades. a) Escriba los vectores en función de las componentes vectoriales x e y . b) Determine el módulo de los vectores, c) el producto escalar y d) el ángulo entre los vectores

d) En el sistema de coordenadas de la figura están representados la fuerza que actúa sobre un objeto y el desplazamiento de éste. Determine el trabajo en joules.

e) Dos remolcadores ejercen una fuerza constante de 4000N cada uno, sobre un buque, donde las fuerzas forman ángulos de 20° respecto al desplazamiento del buque, como se ve en la figura. ¿Cuál es el trabajo realizado sobre el buque por los remolcadores, cuando este se desplaza una distancia de 150m?

f) Un baúl es arrastrado 24m por el suelo, usando una cuerda que forma un ángulo θ con la horizontal, como puede apreciarse en la figura. La tensión en la cuerda es de 25N. Compare el trabajo realizado para ángulos de 0° , 30° y 60°

g) Un baúl es arrastrado 25m por el suelo, usando una cuerda que forma un ángulo θ con la horizontal, como se muestra en la figura. La tensión en la cuerda es de 12N. Calcule el trabajo para ángulos de 0° , 30° y 60°



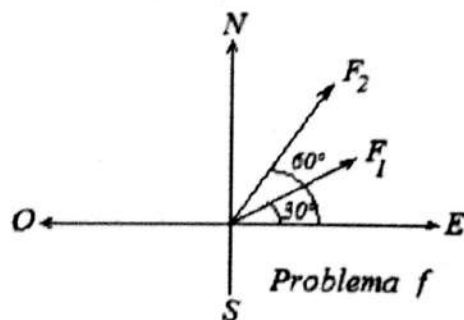
h) Un martillo de 12lb de peso se eleva hasta una altura de 3m. ¿Cuál es el trabajo mínimo que se requiere para hacerlo, expresado en joules?
(Por qué decimos trabajo mínimo?)

Solución N° 7

A continuación, más ejercicios sobre trabajo de una fuerza:

8

- Hallar el ángulo formado por dos vectores de 9 y 6 unidades, si su resultante tiene un módulo igual a 12 unidades. Resuelva el ejercicio aplicando el teorema del coseno
- Hallar las componentes de un vector de 10 unidades según dos direcciones que forman entre sí 70° , si el vector forma con una de ellas un ángulo de 40° . Aplique el teorema del seno en este caso.
- Se tienen 3 vectores cuyos módulos son: $A_1 = 6$ unidades, $A_2 = 5$ unidades y $A_3 = 4$ unidades. El ángulo entre las direcciones de $\vec{A}_1$ y $\vec{A}_2$ es de 50° y entre las de $\vec{A}_2$ y $\vec{A}_3$ es de 75° . Halle el vector resultante de los tres vectores.
- Un nadador va a cruzar un río enfilando en una dirección perpendicular al cauce. El nadador se desplaza a 4,5 km/h, mientras que la corriente de agua tiene una velocidad de 3 km/h y arrastra al nadador. Halle en magnitud y dirección el vector resultante de la velocidad del nadador con respecto a tierra.
- Dos vectores de fuerza $\vec{F}_1 = (3,0\vec{i} - 4,0\vec{j})\text{ N}$ y $\vec{F}_2 = (-6,0\vec{i} + 4,5\vec{j})\text{ N}$ se aplican a un cuerpo. ¿Qué tercera fuerza $\vec{F}_3$ haría que la fuerza neta o resultante sobre el cuerpo fuera cero?
- Dos muchachos tiran de una caja por un piso horizontal, como se muestra en la figura. Si $|\vec{F}_1| = 50,0\text{ N}$ y $|\vec{F}_2| = 100\text{ N}$, encuentre la fuerza resultante mediante a) el método gráfico y b) el método de las componentes
- Un pasajero de un aeropuerto tira de la manija de una maleta rodante. Si la fuerza sobre la maleta es de 10 N y forma un ángulo de 25° respecto a la horizontal, ¿Qué trabajo efectúa la fuerza de tracción cuando el pasajero camina 200 m?

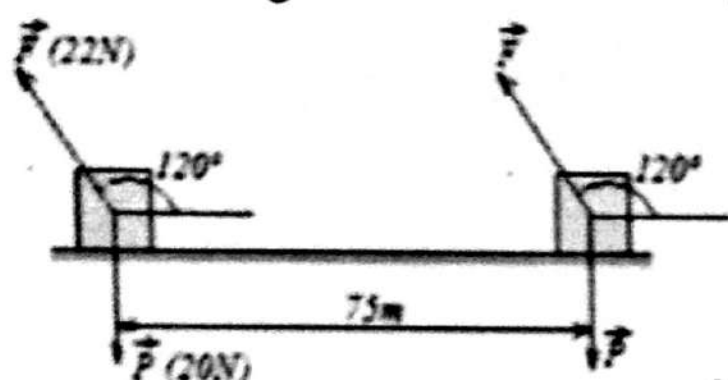


- Una grúa tira de un automóvil a velocidad constante, usando un cable de acero. Al tirar del auto una distancia de 2,5 km, la grúa efectúa un trabajo de 1,25 MJ (megajoules). ¿Cuál fue la tensión promedio del cable?

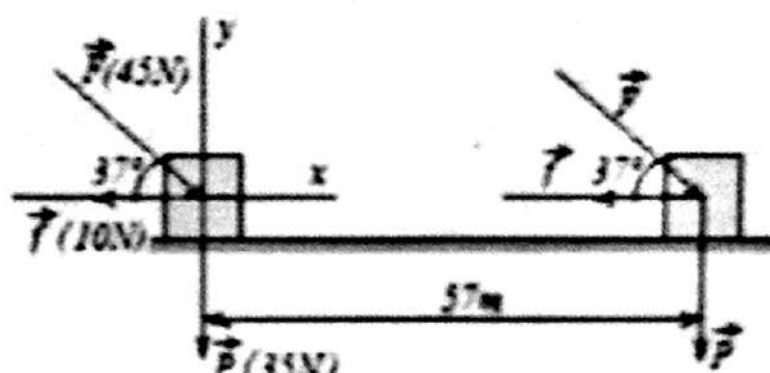
Solución N° 8

a) Un cuerpo es frenado por la fuerza constante F indicada en el dibujo, mientras recorre 75m. Determine el trabajo realizado por a) La fuerza F , b) el peso del cuerpo. c) La fuerza F , ¿levanta el cuerpo por encima del suelo?

b) Un cajón se desplaza 57m, mientras actúa una fuerza F de 45N en dirección de 37° , más una fuerza de rozamiento f de 10N en sentido contrario al desplazamiento, tal como es indicado en la figura. Determine el trabajo neto realizado.



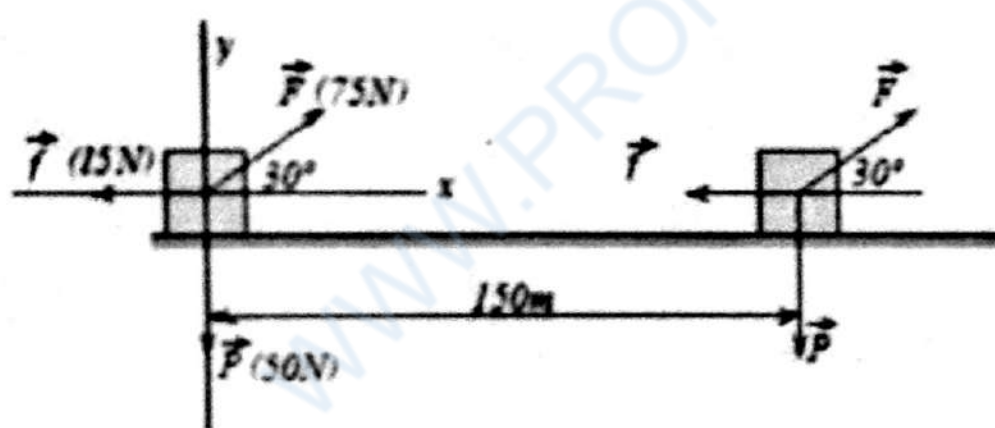
Problema a)



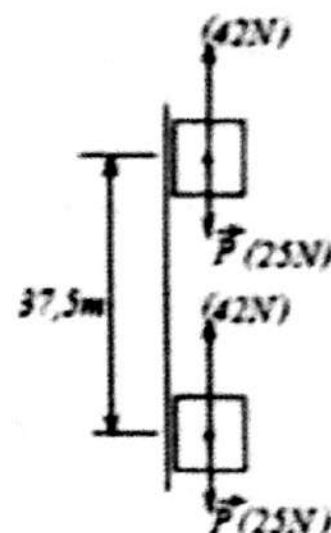
Problema b)

c) Una caja es arrastrada por un piso áspero, mediante la fuerza F indicada en la figura. La fricción o rozamiento con el suelo está representada por la fuerza f , que actúa en sentido contrario al desplazamiento. Determine a) el trabajo de la fuerza F b) el trabajo neto o total. c) ¿Levanta al cuerpo del suelo la fuerza F ?

d) Un objeto es izado verticalmente, una altura de 37,5m, mediante la acción de una fuerza de 42N, como se muestra en la figura. Determine: a) El trabajo neto. b) El trabajo del peso.



Problema c)



Problema d)

e) Un estudiante universitario que realiza trabajos de jardinería durante el verano, empuja una cortadora de césped por una superficie horizontal, con una fuerza de constante de 200N, que forma un ángulo de 30° hacia abajo con respecto a la horizontal. ¿Qué desplazamiento sufre la podadora al efectuar, la fuerza, $1,44 \times 10^3 J$ de trabajo?

f) Un camión de remolque tira de un automóvil 5,00km por una carretera horizontal, usando un cable cuya tensión es de 850N. ¿Qué trabajo realiza el cable sobre el auto, si el cable forma 35° por encima de la horizontal? En dicho desplazamiento, ¿cuánto vale el trabajo realizado por el peso del automóvil?

g) Dos fuerzas paralelas al eje x efectúan un trabajo de 14,7J sobre un pequeño objeto, al moverlo 20,7m en la dirección x a lo largo del piso de un gimnasio. Una de las fuerzas tiene un valor de +3,89N en la dirección x . ¿Cuál es el valor de la otra fuerza?

Solución N° 9

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES DE PROCESO DE LA UNIDAD

2: Fenómenos físicos: a), b), c), f), h).

4 a) Longitud del vector: 7,5cm; ángulo: 45° encima de la horizontal

b) Magnitud del vector = $3,5 \text{ N/cm} \times 7,8 \text{ cm} = 27,3 \text{ N}$

c) $\text{Escala} = \frac{24 \text{ N}}{8 \text{ cm}} = 3 \text{ N/cm}$

5 a) Desplazamiento: 7,2km Ángulo: 56,3° al Norte del Oeste

b) Resultante: magnitud=155N; ángulo: 105° respecto al este

c) Suma: Magnitud=7,2 unidades; ángulo=34° al sur del este. Resta: Magnitud=7,2 unidades; ángulo= 34° al norte del este.

6 a) Determinamos en primer término las componentes de las fuerzas:

$$A_x = A \cos 45^\circ = 150 \times 0,707 = 106 \text{ N}$$

$$A_y = A \sin 45^\circ = 150 \times 0,707 = 106 \text{ N}$$

$$B_x = B \cos(180 - 60)^\circ = 300 \times (-0,5) = -150 \text{ N}$$

$$B_y = B \sin(180 - 60)^\circ = 300 \times 0,866 = 260 \text{ N}$$

$$C_x = C \cos(180 + 50)^\circ = 170 \times (-0,64) = -109 \text{ N}$$

$$C_y = C \sin(180 + 50)^\circ = 170 \times (-0,77) = -130 \text{ N}$$

Las componentes de la resultante son:

$$R_x = A_x + B_x + C_x = 106 \text{ N} - 150 \text{ N} - 109 \text{ N} = -153 \text{ N}$$

$$R_y = A_y + B_y + C_y = 106 \text{ N} + 260 \text{ N} - 130 \text{ N} = 236 \text{ N}$$

$$\theta = \arctan \frac{R_y}{R_x} = \arctan \frac{236}{-153} = -57^\circ. \text{ La resultante está en el}$$

segundo cuadrante: Ángulo = $180 - 57^\circ = 123^\circ$

b) Comenzamos calculando las componentes de las fuerzas:

$$F_{1x} = 220 \text{ N} \cdot \cos 60^\circ = 110 \text{ N}$$

$$F_{1y} = 220 \text{ N} \cdot \sin 60^\circ = 190,5 \text{ N}$$

$$F_{2x} = 125 \text{ N} \cdot \cos 210^\circ = -108 \text{ N}$$

$$F_{2y} = 125 \text{ N} \cdot \sin 210^\circ = -62,5 \text{ N}$$

$$F_{3x} = 175 \text{ N} \cdot \cos 340^\circ = 164,4 \text{ N}$$

$$F_{3y} = 175 \text{ N} \cdot \sin 340^\circ = -59,8 \text{ N}$$

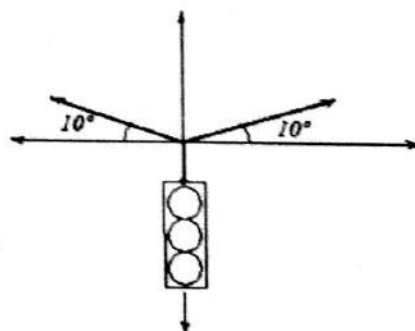
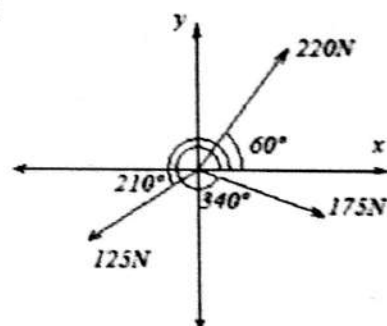
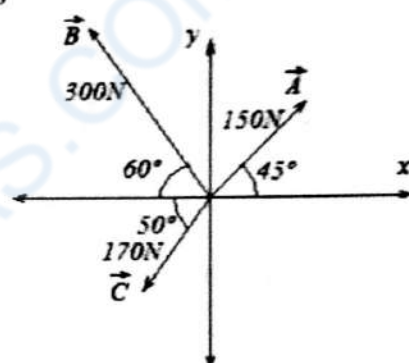
Ahora, las componentes de la resultante:

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = 110 \text{ N} - 108 \text{ N} + 164,4 \text{ N} = 166,4 \text{ N}$$

$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = 190,5 \text{ N} - 62,5 \text{ N} - 59,8 \text{ N} = 68,2 \text{ N}$$

$$\theta = \arctan \frac{R_y}{R_x} = \arctan \frac{68,2}{166,4} = 22,3^\circ$$

c) Las componentes de las fuerzas sobre el semáforo son:



$$T_{1x} = 200N \cdot \cos 10^\circ = 197N$$

$$T_{1y} = 200N \cdot \sin 10^\circ = 34,7N$$

$$T_{2x} = 200N \cdot \cos 170^\circ = -197N$$

$$T_{2y} = 200N \cdot \sin 170^\circ = 34,7N$$

El peso del semáforo actúa en dirección vertical hacia abajo. No tiene componente x

$$R_x = T_{1x} + T_{2x} = 197N - 197N = 0N$$

$$R_y = T_{1y} + T_{2y} - P = 0$$

$$P = T_{1y} + T_{2y} = 34,7N + 34,7N = 69,5N$$

d) a) Resultante $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$. Las componentes de la resultante, son:

$$R_x = B = -270N$$

$$R_y = A = -500N$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(-270)^2 + (-500)^2} = 568N$$

$$\theta = \arctg \frac{R_y}{R_x} = \arctg \frac{-500}{-270} = 61,6^\circ$$

El ángulo está en el tercer cuadrante: $180^\circ + 61,6^\circ = 241,6^\circ$

b) Vector diferencia: $\vec{R} = \vec{A} - \vec{B}$

$$R_x = -B = -(-270N) = 270N$$

$$R_y = A = -500N$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 568N$$

$$\theta = \arctg \frac{R_y}{R_x} = \arctg \frac{-500}{270} = -61,6^\circ$$

El ángulo está ahora en el cuarto cuadrante: $360^\circ - 61,6^\circ = 298,4^\circ$

e) Las componentes de las fuerzas son:

$$F_{1x} = 0$$

$$F_{1y} = 60N$$

$$F_{2x} = 40N \cdot \cos(180 - 20)^\circ = -37,6N$$

$$F_{2y} = 40N \cdot \sin(180 - 20)^\circ = 13,7N$$

$$F_{3x} = 50N \cdot \cos(180 + 50)^\circ = -32,1N$$

$$F_{3y} = 50N \cdot \sin(180 + 50)^\circ = -38,3N$$

Las componentes de la resultante:

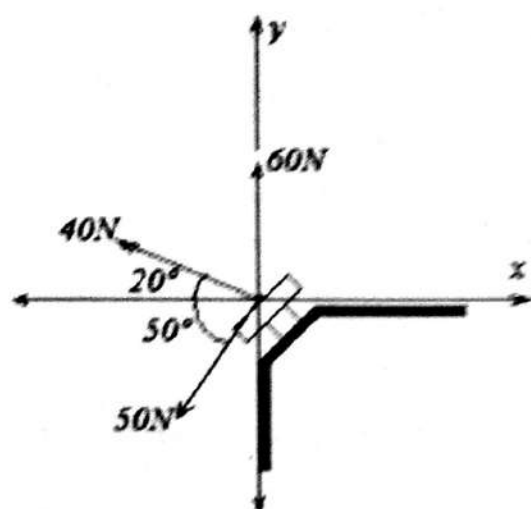
$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = 0 - 37,6N - 32,1N = -69,7N$$

$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = 60N + 13,7N - 38,3N = 35,4N$$

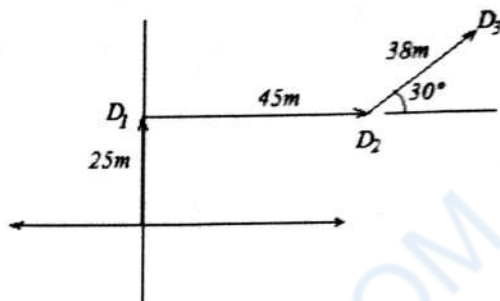
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(-69,7)^2 + 35,4^2} = 78,2N$$

$$\theta = \arctg \frac{R_y}{R_x} = \arctg \frac{35,4}{-69,7} = -26,9^\circ$$

Ángulo en el segundo cuadrante: $180^\circ - 26,9^\circ = 153,1^\circ$



f) Componentes del desplazamiento del participante



$$D_{1x} = 0$$

$$D_{1y} = 25m$$

$$D_{2x} = 45m$$

$$D_{2y} = 0m$$

$$D_{3x} = D_3 \cdot \cos 30^\circ = 38 \times 0,87 = 32,9m$$

$$D_{3y} = D_3 \cdot \sin 30^\circ = 38 \times 0,5 = 19m$$

$$D_x = D_{1x} + D_{2x} + D_{3x} = 0 + 45m + 32,9m = 77,9m$$

$$D_y = D_{1y} + D_{2y} + D_{3y} = 25m + 0m + 19m = 44m$$

$$D = \sqrt{D_x^2 + D_y^2} = \sqrt{(77,9m)^2 + (44m)^2} = 89,5N$$

$$\theta = \arctg \frac{R_y}{R_x} = \arctg \frac{44}{77,9} = 29,5^\circ$$

7 a) $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y = 4 \times (-2) + 5 \times 3 = -8 + 15 = 7$

b) Como el producto escalar se define por:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta; \text{ despejamos } \cos \theta:$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB}$$

Para aplicar esta fórmula, necesitamos conocer los módulos de $\vec{A}$ y $\vec{B}$

$$A = \sqrt{4^2 + 5^2} = 6,4$$

$$B = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = 3,6$$

$$\cos \theta = \frac{7}{6,4 \times 3,6} = 0,304 \quad ; \quad \theta = 72,3^\circ$$

b) Como vimos anteriormente, se cumple la propiedad distributiva:

$$\vec{C} \cdot (\vec{A} - \vec{B}) = \vec{C} \cdot \vec{A} - \vec{C} \cdot \vec{B}$$

$$\vec{C} \cdot \vec{A} = C_x A_x + C_y A_y = 2 \times 4 + (-3) \times 5 = -7$$

$$\vec{C} \cdot \vec{B} = C_x B_x + C_y B_y = 2(-2) + (-3) \times 3 = -13$$

En consecuencia:

$$\vec{C} \cdot (\vec{A} - \vec{B}) = -7 - (-13) = 6$$

c) a) $\vec{A} = 0\vec{i} + 2\vec{j} \quad ; \quad \vec{B} = -5\vec{i} + 3\vec{j}$

b) $A = 2 \quad ; \quad B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{(-5)^2 + 3^2} = 5,83$

c) Producto escalar: $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta = A_x B_x + A_y B_y = 0 + 2 \times 3 = 6$

d) $\cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB} = \frac{6}{5,8 \times 2} = 0,514; \quad \theta = 59^\circ$

d) Determinamos la componente de cada vector. Observe que los ángulos han sido medidos con respecto al eje y. Debemos sumar 90° ; además, d está expresado en cm. Debemos convertir a m:

$$\text{Ángulo de } \vec{F} = 120^\circ + 90^\circ = 210^\circ$$

$$\text{Ángulo de } \vec{d} = 150^\circ + 90^\circ = 240^\circ$$

$$d = 20\text{cm} = 0,2\text{m}$$

A continuación calculamos las componentes de $\vec{F}$ y $\vec{d}$:

$$F_x = 30\text{N} \times \cos 210^\circ = -26\text{N}$$

$$F_y = 30\text{N} \times \sin 210^\circ = -15\text{N}$$

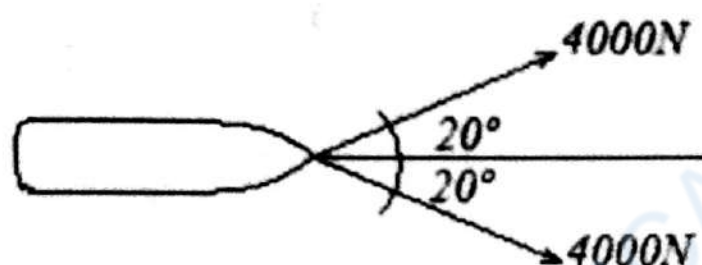
$$d_x = 0,2\text{m} \times \cos 240^\circ = -0,1\text{m}$$

$$d_y = 0,2\text{m} \times \sin 240^\circ = -0,17\text{m}$$

El trabajo es:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = F_x d_x + F_y d_y = (-26\text{N}) \cdot (-0,1\text{m}) + (-15) \cdot (-0,17\text{m}) = 5,15\text{J}$$

e)

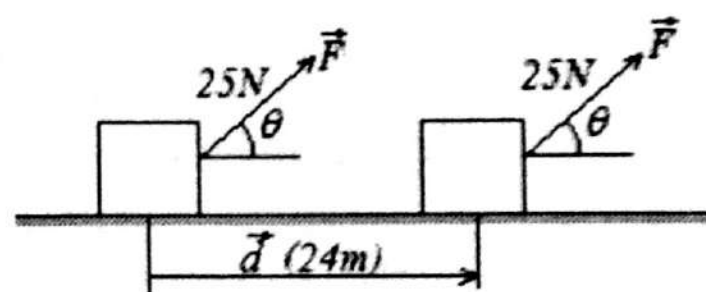


$$W = W_1 + W_2 = F_1 d \cos 20^\circ + F_2 d \cos 20^\circ = 4000 \times 150 \times 0,93 + 4000 \times 150 \times 0,93 = 1,13 \times 10^6 \text{ J}$$

$$\text{f) } W_{0^\circ} = \vec{F} \cdot \vec{d} = Fd = 25 \times 24 = 600\text{J}$$

$$W_{30^\circ} = \vec{F} \cdot \vec{d} = Fd \cos 30^\circ = 25 \times 24 \times 0,87 = 522\text{J}$$

$$W_{60^\circ} = \vec{F} \cdot \vec{d} = Fd \cos 60^\circ = 25 \times 24 \times 0,5 = 300\text{J}$$



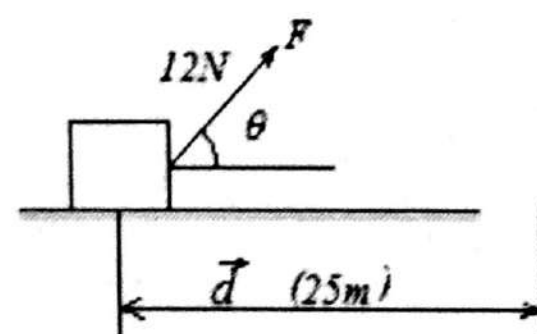
g) Realizamos un esquema para interpretar el problema:

Calculamos los trabajos:

$$W_{0^\circ} = 12\text{N} \times 25\text{m} \times \cos 0^\circ = 300\text{J}$$

$$W_{30^\circ} = 12\text{N} \times 25\text{m} \times \cos 30^\circ = 260\text{J}$$

$$W_{60^\circ} = 12\text{N} \times 25\text{m} \times \cos 60^\circ = 150\text{J}$$



h) Como el peso del martillo está expresado en libras y queremos calcularlo en joules, debemos convertir a newton.

$$12\text{lb} = 12\text{lb} \times \frac{4,45\text{N}}{1\text{lb}} = 53,4\text{N}$$

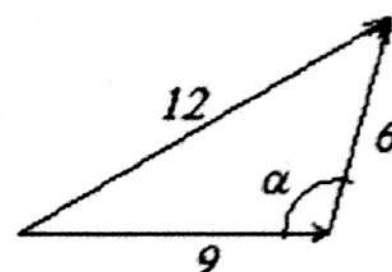
El trabajo es entonces:

$$W = 53,4\text{N} \times 3\text{m} = 160\text{J}$$

8 a) $104,5^\circ$ resolver por teorema del coseno:

Aplicamos teorema del coseno, en función de la figura:

$$12^2 = 9^2 + 6^2 - 2 \times 9 \times 6 \cos \alpha$$



$$\cos \alpha = \frac{117-144}{108} = -0,25; \alpha = 104,5^\circ$$

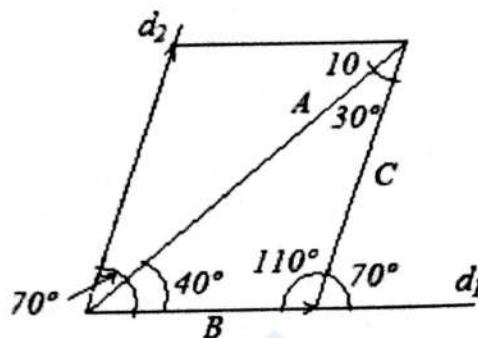
b) Aplicamos el teorema del seno en este caso:

$$\frac{A}{\sin 110^\circ} = \frac{B}{\sin 30^\circ} = \frac{C}{\sin 40^\circ}$$

$$\frac{10}{\sin 110^\circ} = \frac{B}{\sin 30^\circ}; B = 10 \frac{\sin 30^\circ}{\sin 110^\circ} = 5,32$$

$$B = 10 \frac{\sin 30^\circ}{\sin 110^\circ} = 5,32$$

$$C = 10 \frac{\sin 40^\circ}{\sin 110^\circ} = 6,84$$



c) Magnitud: 10; ángulo: 45° respecto a $\vec{A}_1$

d) Magnitud de la velocidad del nadador respecto a tierra: 5,4 km/h. Ángulo respecto a la orilla: $56,3^\circ$

e) $\vec{F}_3 = (3,0\vec{i} - 0,5\vec{j})N$

f) $R = 145,5N$; $\theta = 50^\circ$

g) 1813J

h) 500N

9 a) Calculamos las componentes de la fuerza F respecto a un sistema de coordenadas:

$$F_x = F \cos 120^\circ = -0,5 \times 22N = -11N$$

$$F_y = F \sin 120^\circ = 0,866 \times 22N = 19N$$

Determinamos:

a) $W_F = F \cos 120^\circ \times d = -11N \times 75m = -825J$ Este trabajo es negativo

b) $W_P = P \cos 270^\circ \times d = 0J$ Este trabajo es cero pues P es perpendicular al desplazamiento

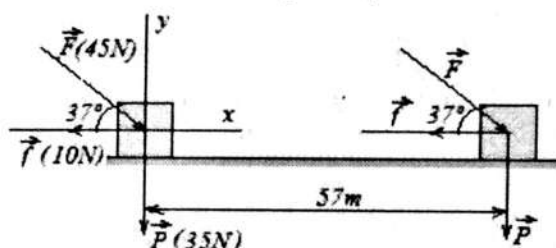
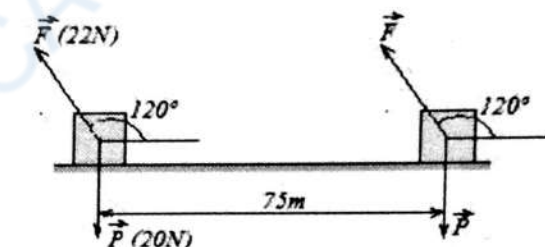
c) La fuerza F no levanta al cuerpo pues su componente vertical es menor que el peso.

b) Descomponemos las fuerzas en sus componentes

$$F_x = F \cos(-37^\circ) = 0,8F = 0,8 \times 45N = 36N$$

$$F_y = F \sin(-37^\circ) = -0,6F = -0,6 \times 45N = -27N$$

Tomamos negativo el ángulo, porque F está por debajo del eje +x



Para el trabajo neto, vemos que actúan dos fuerzas en la dirección del desplazamiento:

F_x y f , la fuerza de rozamiento que se opone al desplazamiento

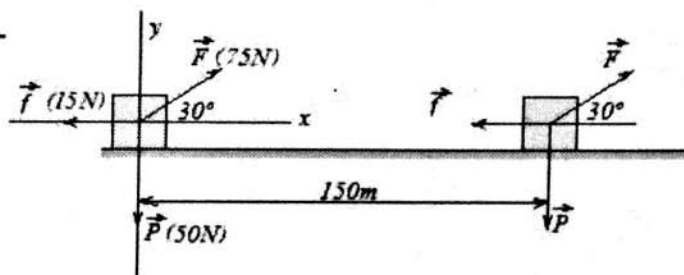
$$W_{neto} = (F \cos \theta - f) \cdot d = (36N - 10N) \times 57m = 1482J$$

c) Conviene descomponer la fuerza F en un sistema de coordenadas:

$$F_x = F \cos 30^\circ = 75N \times 0,866 = 65N$$

$$F_y = F \sin 30^\circ = 75N \times 0,5 = 37,5N$$

Calculamos ahora los trabajos:



a) $W_F = F \cos \theta \cdot d = 65 \text{ N} \times 150 \text{ m} = 9743 \text{ J} \approx 9750 \text{ J}$

b) $W_{\text{neto}} = (F \cos \theta - f) \cdot d = (65 \text{ N} - 15 \text{ N}) \times 150 \text{ m} = 7493 \approx 7500 \text{ J}$

c) La fuerza F no levanta el cuerpo, pues su componente vertical es menor que el peso del cuerpo.

d) La fuerza neta vale:

$$F_n = 42 \text{ N} - P = 42 \text{ N} - 25 \text{ N} = 17 \text{ N}$$

a) Trabajo neto: $W_n = 17 \text{ N} \times 37,5 \text{ m} = 637,5 \text{ J}$

b) Trabajo del peso: $W_p = 25 \text{ N} \times 37,5 \text{ m} \times \cos 180^\circ = -937,5 \text{ J}$

e) El trabajo vale:

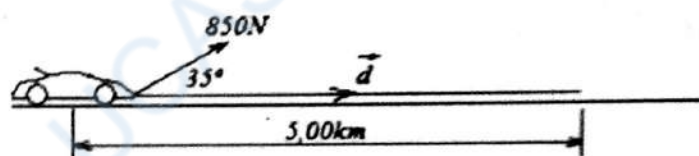
$$W = F_d \cdot d = 200 \text{ N} \times \cos 30^\circ \times d = 1,44 \times 10^3 \text{ J}$$

De aquí despejamos el desplazamiento:

$$d = \frac{W}{F_d \cos 30^\circ} = \frac{1,44 \times 10^3 \text{ J}}{200 \text{ N} \times \cos 30^\circ} = 8,3 \text{ m}$$

f) Realizamos un esquema de la situación:

El trabajo es:



$$W = 850 \text{ N} \times 5000 \text{ m} \times \cos 35^\circ = 3481396 \text{ J} = 3,48 \times 10^6 \text{ J}$$

El trabajo realizado por el peso es cero, ya que esta fuerza actúa perpendicularmente al desplazamiento.

g) Calculamos el trabajo de la fuerza conocida:

$$W_1 = 3,89 \text{ N} \times 20,7 \text{ m} = 80,5 \text{ J}$$

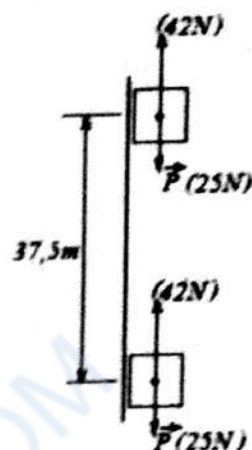
Determinamos ahora el trabajo de la segunda fuerza:

$$W_2 = W - W_1 = 14,7 \text{ J} - 80,5 \text{ J} = -65,8 \text{ J}$$

Ahora determinamos F_2 :

$$F_2 = \frac{W_2}{d} = \frac{-65,8 \text{ J}}{20,7 \text{ m}} = -3,17 \text{ N}$$

Observamos que F_2 actúa en sentido contrario a F_1 .



Unidad 3: Estática

Contenido de la unidad

1. Definiciones. Partícula en reposo. Primera ley de Newton. Concepto de fuerza. Tercera ley del movimiento de Newton.
2. Condiciones de equilibrio de una partícula. Equilibrio traslacional. Diagrama del cuerpo libre.
3. Modelización matemática: método analítico o de las componentes
4. Nociones sobre el equilibrio rotacional.

1.- Definiciones. Partícula en reposo. Concepto de fuerza. Tercera ley de Newton del movimiento.

En esta unidad analizamos el equilibrio de los cuerpos. Las armaduras, vigas cables etc., de una estructura, deben estar equilibradas y las construcciones deben realizarse conociendo a fondo las fuerzas que actúan y la forma de controlarlas.

La Estática es la parte de la Física que estudia las fuerzas y su relación con el equilibrio de los cuerpos.

La experiencia nos enseña que un cuerpo estacionario permanece en reposo, a menos que una fuerza externa resultante modifique esta condición. Si el cuerpo está en movimiento, continuará haciéndolo hasta que una fuerza exterior resultante (fuerza neta) cambie dicho estado. Por ejemplo, una caja que se desliza por un suelo horizontal, pronto se detendrá debido a la interacción entre la caja y el suelo. Esa interacción horizontal se denomina fricción o rozamiento.

Todos estos conceptos están incluidos en la primera ley del movimiento de Newton:

Un cuerpo permanece en estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme (velocidad constante), a menos que una fuerza neta no equilibrada actúe sobre él.

De lo dicho hasta ahora, se deduce que el movimiento de los cuerpos es producido por la acción de las fuerzas. Comenzamos entonces definiendo el concepto de fuerza.

Fuerza es toda acción ejercida por un cuerpo o partícula sobre otro, capaz de moverlo, detenerlo, deformarlo, atraerlo o mantenerlos unidos

Las fuerzas pueden manifestarse de diferentes maneras: supongamos un cajón en reposo sobre el suelo. Sabemos que para moverlo tenemos que empujar o tirar de él. Si queremos colocarlo encima de una mesa, debemos levantarlo. En cualquiera de estos casos debemos ejercer una fuerza, generalmente con nuestros brazos (fuerza muscular).

Cuando intentamos frenar un automóvil, aplicamos una fuerza con el pie sobre el pedal de frenos. Esto acciona una zapata que presiona un disco o la pista de una pieza en forma de campana. Se habla aquí de una fuerza de fricción.

A menudo leemos artículos en los periódicos o revistas acerca de la atracción terrestre sobre objetos en el espacio. Este es el caso de la fuerza gravitacional. Este tipo de fuerza se dice que es de acción a distancia, a diferencia de aquellas que se producen entre cuerpos que están en contacto.

¿Por qué un pegamento mantiene unidos dos cuerpos? Las fuerzas responsables de esto, se denominan fuerzas de adhesión.

Los herreros deforman y modelan barras de hierro a golpes de martillo. Decimos aquí que actúan fuerzas elásticas y de deformación.

La fuerza es una cantidad vectorial; esto significa que además de su intensidad, debe especificarse la dirección y el sentido en que actúa. En otros casos, se requiere conocer además el punto de aplicación de la fuerza. Como sobre un cuerpo pueden actuar varias fuerzas en forma simultánea, sus efectos pueden compensarse o sumarse.

Se denomina fuerza neta a la resultante de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo. La resultante se obtiene mediante el procedimiento de suma vectorial

Para medir la intensidad de una fuerza se utiliza generalmente un tipo de instrumento que recibe el nombre de balanza de resorte o dinamómetro, que aprovecha la propiedad que presentan los resortes, de estirarse en forma proporcional a la fuerza aplicada, siempre que el estiramiento no sea tan grande como para deformarlo en forma permanente.

La utilización de un dinamómetro para medir una fuerza, requiere de una calibración previa: para esto se define una fuerza unitaria, diciendo que es la fuerza que produce un alargamiento unitario; por ejemplo, de 1cm. Luego, si otra fuerza produce un alargamiento de 1,5cm es porque ésta es 1,5 veces mayor.

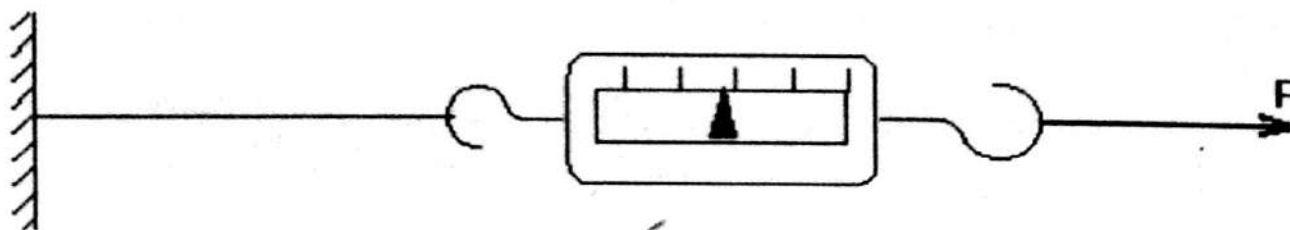


Figura 23

En el Sistema Internacional, las fuerzas se miden en newton.

En los siguientes ejemplos, indique si se trata de fuerzas de contacto o de acción a distancia y en qué circunstancias puede haber movimiento. Proporcione cualquier información adicional que crea conveniente acerca de las características de las fuerzas:

- 1) Un puntapié a un balón.
- 2) La acción del viento sobre una pared.
- 3) La atracción que la tierra ejerce sobre la luna.
- 4) La fuerza que ejerce un resorte contraído.
- 5) La atracción o repulsión entre cuerpos cargados de electricidad.
- 6) La caída de una hoja en el aire

Solución N°10

Siempre que actúan las fuerzas, están involucrados al menos dos cuerpos. Si golpeamos un clavo con un martillo, son dos los cuerpos que interaccionan: el clavo y el martillo; el martillo ejerce una "acción sobre el clavo, pero el clavo "reacciona" ejerciendo una fuerza sobre el martillo.

En todos los casos debe haber una fuerza de acción actuando sobre uno de los cuerpos y una fuerza de reacción sobre el otro. No interesa a cuál de ellas denominamos acción y a cuál reacción; es indistinto. Lo importante es que estas dos fuerzas son iguales en magnitud y dirección, pero tienen sentidos opuestos y actúan sobre cuerpos diferentes. Esta es la esencia de la tercera ley de Newton:

Para cada acción que un cuerpo ejerce sobre otro, debe haber una reacción igual y opuesta, que el segundo cuerpo aplica sobre el primero.

El significado de esta ley es que no puede existir una sola fuerza aislada. Las fuerzas siempre se presentan de a pares. En la figura 24 se presentan algunos ejemplos.

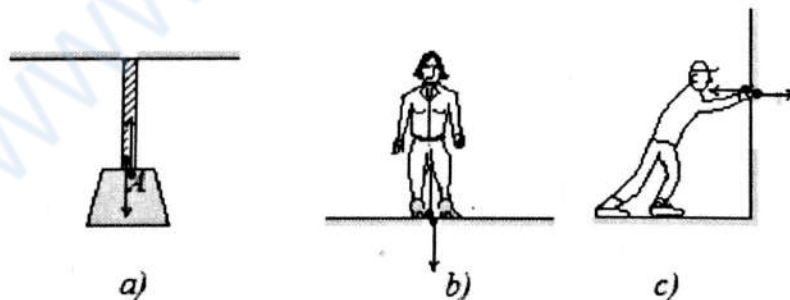


Figura 24

En a) la cuerda tira del bloque en el punto A (acción sobre el bloque), mientras que el bloque reacciona tirando en dicho punto sobre la cuerda (reacción sobre la cuerda). En b) la chica ejerce una fuerza sobre el suelo (acción sobre el suelo), mientras que el suelo responde con una reacción sobre la chica. Por último en c) la persona ejerce una acción sobre la pared, mientras que la pared responde con una reacción sobre la persona.

2.- Condiciones de equilibrio de una partícula. Equilibrio traslacional. Diagrama del cuerpo libre.

Hemos estudiado que la fuerza resultante de un sistema de fuerzas que actúa sobre un cuerpo, es una fuerza única cuyo efecto es igual al del sistema de fuerzas

Existe una condición de equilibrio traslacional, cuando la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo es cero. Esto significa que las fuerzas que actúan compensan sus efectos entre sí

Un cuerpo en equilibrio puede encontrarse en reposo o en movimiento con velocidad constante. En el primer caso hablamos de equilibrio estático, mientras que en el segundo nos referimos al equilibrio cinemático o de traslación.

Veamos algunos ejemplos familiares en relación con este concepto: una persona sentada en una habitación está en reposo respecto al piso de la habitación, al mismo tiempo que otros objetos, tales como los muebles, cuadros, artefactos de iluminación, etc. Todos los objetos de la habitación y la persona decimos que están en equilibrio estático, pues consideramos a la tierra como un sistema en reposo. Cuando un tren viaja a velocidad constante en una trayectoria recta, los objetos que están en reposo dentro del tren, tales como un pasajero sentado, otro parado en el pasillo, las butacas, etc., están en equilibrio cinemático, pues el tren se desplaza respecto a la tierra. Cuando el tren aumenta o disminuye su velocidad, la persona parada en el pasillo ya no está en equilibrio y si no se sujeta puede caer. Vamos a ver en la siguiente unidad, que cuando cambia la velocidad existe una aceleración; la responsable de la aceleración del tren y de todos los objetos y personas que se encuentran dentro de él es una fuerza, como podrá profundizar cuando estudie la dinámica al cursar la materia.

En la unidad anterior analizamos los métodos de resolución de sistemas de fuerzas. Cuando actúan más de dos fuerzas, el método del polígono es el más apropiado para encontrar la resultante o vector suma. En este caso dibujamos los vectores que representan las fuerzas, con su magnitud y sentido, uno a continuación del otro y en una secuencia determinada. La resultante no se altera si cambiamos la secuencia. Cuando el extremo de la última fuerza representada coincide con el origen de la primera, la resultante es cero y el polígono se encuentra cerrado (ver la figura 25). El cuerpo sobre el cual actúan estas fuerzas se encuentra en equilibrio.

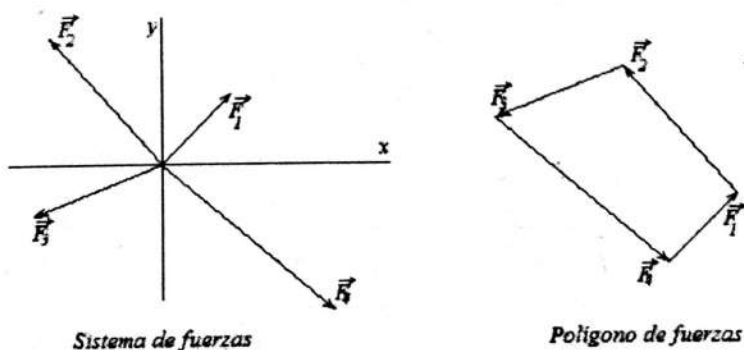


Figura 25

Un sistema de fuerzas no equilibrado puede equilibrarse mediante una fuerza adicional igual y de sentido opuesto a la resultante. Esta fuerza es denominada la equilibrante. En la figura 26 actúan las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$, dando lugar a la resultante $\vec{R}$. Si consideramos una fuerza adicional $\vec{E}$ de igual magnitud y dirección que la resultante, pero que actúa en sentido opuesto, ésta será la equilibrante.

Se denomina equilibrante a una fuerza igual en magnitud y dirección a la resultante, que actúa en sentido opuesto a esta.

En la figura se cumple que

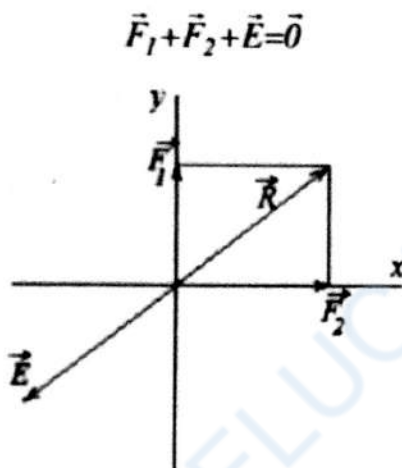


Figura 26

Escribimos matemáticamente la condición de equilibrio traslacional de un cuerpo, mediante la siguiente expresión:

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

Esta ecuación se divide, para las componentes en el plano, cuando el sistema de fuerzas de representa en coordenadas x - y en dos ecuaciones, una para el eje x y otra para el eje y :

$$\sum \vec{F}_x = \vec{0}$$

$$\sum \vec{F}_y = \vec{0}$$

El símbolo $\sum$ empleado en las expresiones anteriores, se denomina “sumatoria”; indica una operación de suma entre diferentes fuerzas o componentes que suelen identificarse algebraicamente por medio de subíndices numéricos. Ud. terminará de comprender el uso de este operador, una vez que comience el estudio de Álgebra. En nuestro caso, lo utilizaremos para indicar que todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo se suman vectorialmente.

Diagrama del cuerpo libre

La correcta aplicación de las leyes del movimiento a la resolución de problemas, requiere de una adecuada diagramación del problema que se quiere analizar. Dos tipos de diagramas son aplicables.

Diagrama del espacio: es un diagrama completo que ilustra la situación física. En él se muestran los cuerpos que intervienen y todas las fuerzas que actúan.

Diagrama del cuerpo libre: aquí representamos a cada cuerpo mediante diagramas aislados dibujando en cada caso todas las fuerzas que actúan. Los cuerpos pueden indicarse como puntos.

El siguiente ejemplo permite interpretar lo que estamos comentando:

EJEMPLO 1: Diagrama del cuerpo libre. Acción y reacción

Un bloque se encuentra apoyado sobre una superficie, como se indica en la figura 5. Se pide:

- Identifique todas las parejas de fuerzas de acción y reacción que actúan en este sistema.
- ¿Cuál es la reacción al peso w ?

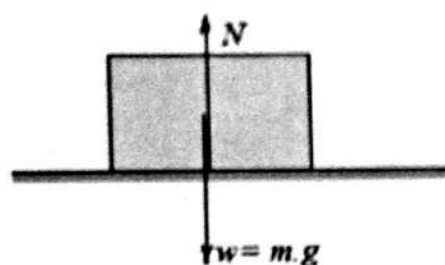


Figura 27 Bloque apoyado sobre una superficie (Diagrama del espacio)

Respuesta:

Los diagramas del cuerpo libre para los dos objetos que integran el sistema, la tierra o superficie de apoyo y el bloque, son los siguientes:

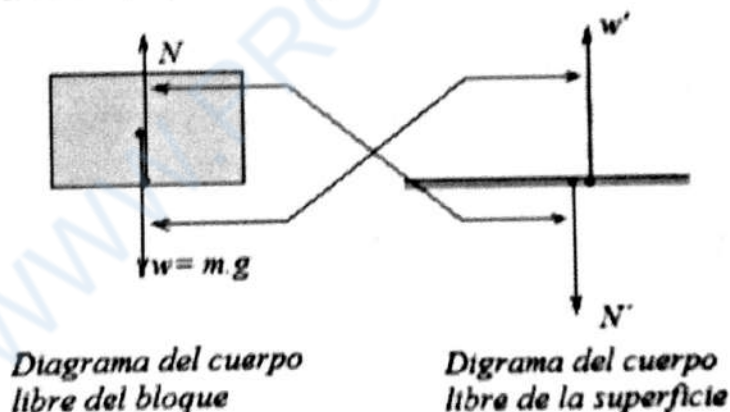


Figura 28

1º) **Diagrama del cuerpo libre del bloque:** las fuerzas que actúan sobre éste son: El peso w , que es la fuerza con la cual la tierra atrae al bloque y N , la fuerza que la superficie ejerce sobre el cuerpo. Esta fuerza normal N es la que mantiene al cuerpo en equilibrio; si no existiera, el cuerpo tendría que caer debido a su propio peso. Estas dos fuerzas no constituyen una pareja de acción y reacción, ya que están aplicadas al mismo objeto.

Debido a que el bloque está en reposo, la primera ley de Newton da como resultado:

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

Esta operación indica que:

$$\vec{N} + \vec{w} = \vec{0} \therefore \\ \vec{N} = -\vec{w}$$

A menudo se confunde a N como la reacción de w y no es así; ya que N es la fuerza aplicada al cuerpo por la superficie de apoyo, está aplicada sobre el cuerpo. La existencia de N es indiscutible como acabamos de explicar, porque si ella no estuviera, el cuerpo no estaría equilibrado y caería con una aceleración igual a la aceleración de la gravedad, como verá al cursar Física I.

2º) Diagrama del cuerpo libre de la superficie: si suponemos que esta superficie es la Tierra, las fuerzas actuantes sobre ella son la reacción al peso w , que es la fuerza w' con la cual el cuerpo atrae a la Tierra y N' que es la fuerza que el cuerpo le aplica a la superficie y constituye la reacción a N . Tampoco puede decirse aquí que w' y N' constituyan parejas de acción y reacción ya que, como en el caso anterior, ambas actúan sobre la superficie. Se equilibran entre sí, dando como resultado que la superficie está en reposo:

$$\vec{w}' = -\vec{N}'$$

Como regla para determinar las parejas de acción y reacción no se limite a ver simplemente si estas fuerzas son iguales y de sentido opuesto, sino que debe también observar si están aplicadas sobre un mismo cuerpo o sobre cuerpos diferentes.

Respuestas a las preguntas del ejemplo 1:

- a) En la figura 28 están identificadas mediante flechas, cuáles son las parejas de acción y reacción que, como puede verse, están aplicadas en cuerpos diferentes.
- b) La reacción al peso w , no es la normal N , sino w' , la fuerza con la cual el bloque atrae a la tierra.

Procedimiento para trazar el diagrama del cuerpo libre:

1. Trace un bosquejo del problema, representando todas las fuerzas con sus ángulos (diagrama del espacio).
2. Aísle cada cuerpo del sistema en estudio.
3. Dibuje las fuerzas que actúan sobre cada cuerpo del sistema. Puede resultar conveniente trazar un sistema de coordenadas x - y ; ubique el origen de los vectores coincidiendo con el centro de coordenadas.
4. Trace con líneas punteadas las líneas de proyección hacia los ejes, para determinar las componentes x e y de las fuerzas. Determine los ángulos de las fuerzas.
5. Asegúrese de marcar todas las componentes, conocidas o desconocidas. Incluya también la fuerza de la gravedad (peso)

3.- Modelización matemática: método analítico o de las componentes

La metodología analítica más conveniente para el estudio de condiciones de equilibrio en cuerpos, es el método de las componentes, que analizamos en la unidad anterior.

Para la aplicación de esta metodología, como hemos visto, se utiliza un sistema de coordenadas cartesianas donde son representados los vectores. Las componentes de los vectores son las proyecciones sobre los ejes cartesianos

La suma de las componentes sobre cada eje, da como resultado las componentes de la resultante. Por último, la magnitud de ésta resulta igual a la hipotenusa del triángulo rectángulo que forman sus componentes. Repasamos el método mediante la resolución del siguiente ejemplo:

EJEMPLO 2. Método de las componentes

Determinar la resultante de los vectores F_1 y F_2 , representados en la figura 29.

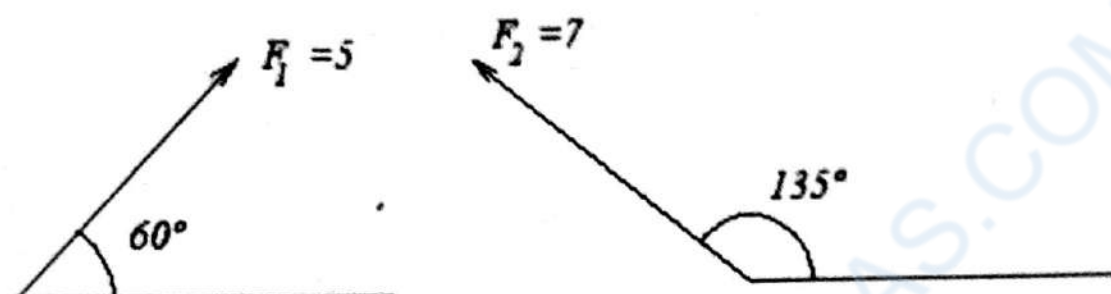


Figura 29

Respuesta:

Se representan los vectores en un sistema de ejes x-y

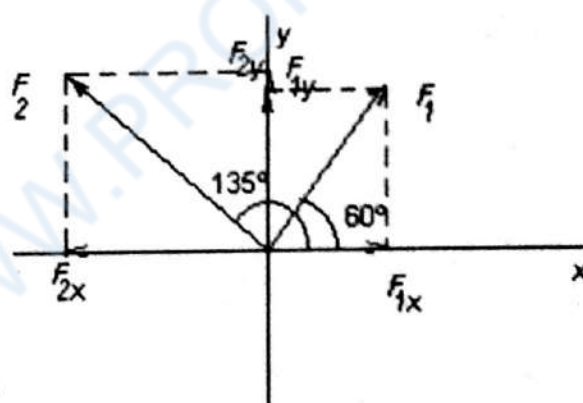


Figura 30

Las componentes de los vectores son F_{1x} , F_{1y} , y F_{2x} , F_{2y} respectivamente. Las magnitudes de estas componentes pueden obtenerse analíticamente:

$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos 60^\circ = 5 \times 0,5 = 2,5$$

$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin 60^\circ = 5 \times 0,866 = 4,3$$

$$F_{2x} = F_2 \cdot \cos 135^\circ = 7 \times (-0,7) = -4,9$$

$$F_{2y} = F_2 \cdot \sin 135^\circ = 7 \times 0,7 = 4,9$$

Las componentes de la resultante:

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} = 2,5 - 4,9 = -2,4$$

$$R_y = F_{1y} + F_{2y} = 4,3 + 4,9 = 9,2$$

El módulo de la resultante es:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{2,4^2 + 9,2^2} = 9,5$$

y forma un ángulo con la horizontal de:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{9,2}{-2,4} = -3,8 ; \quad \theta = \operatorname{tg}^{-1}(-3,8) = 104,7^\circ$$

Realizamos ahora la siguiente ejercitación:

11

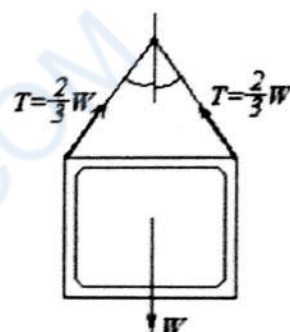
1) Un avión viaja 150 km desde una ciudad A hacia el este hasta una ciudad B y desde allí, hasta una ciudad C 200km hacia el norte. ¿Cuál es la distancia en línea recta desde A hasta C y cuál es la dirección?

2) Tres vectores de magnitud 5m forman los siguientes ángulos respecto a x: 37° , 125° y 270° . Determine la resultante utilizando el método analítico.

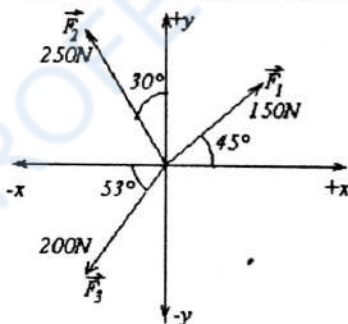
3) Encuentre la resultante de los siguientes vectores:

$$(4,0\text{m}; 2,0\text{m}) \quad , \quad \vec{B} (-6,0\text{m}; 3,5\text{m}) \quad \text{y} \quad \vec{C} (0; -5,5\text{m}).$$

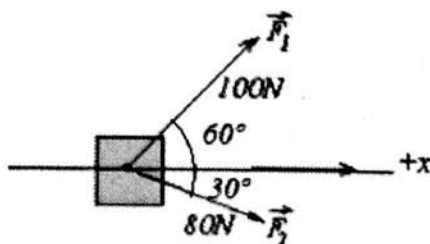
4) Un cuadro colgado de una pared, está sostenido por dos alambres sujetos a sus esquinas superiores. Si los alambres forman el mismo ángulo con la vertical, ¿Cuánto medirá dicho ángulo si la tensión en los alambres es igual a $\frac{2}{3}$ del peso del cuadro?



5) Tres fuerzas actúan sobre un cuerpo situado en el origen de un sistema de coordenadas, tal como se indica en la figura. a) Calcule las componentes x e y de cada una de las tres fuerzas y la resultante, utilizando el método analítico de las componentes. b) ¿Cuál ha de ser la magnitud y dirección de una cuarta fuerza equilibrante del sistema; es decir, que haga que la resultante sea nula?



6) Tres personas empujan un objeto, el cual se mueve en la dirección del eje $+x$. Dos de ellos realizan las fuerzas indicadas en la figura. a) Encuentre la magnitud y dirección de la fuerza mínima que debe realizar la tercera persona para mover el objeto en la dirección indicada b) ¿Por qué se menciona "fuerza mínima"?

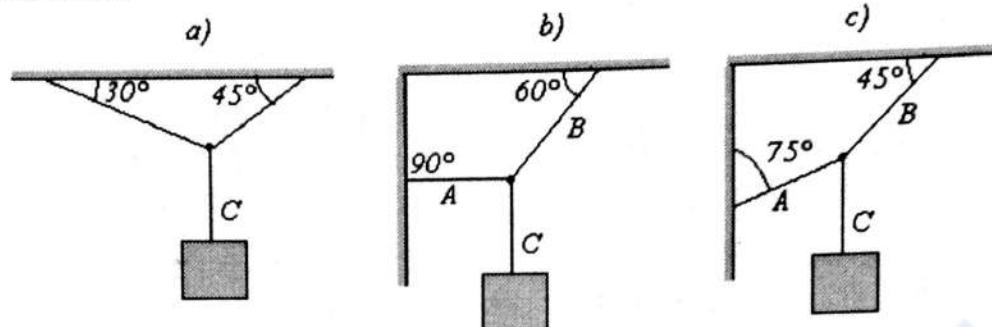


7) Utilizando el método analítico, encuentre la resultante del siguiente sistema de fuerzas: 100N dirigida verticalmente hacia abajo; 80N y 37° por encima de la horizontal, dirigida hacia la derecha y 50N dirigida horizontalmente hacia la izquierda

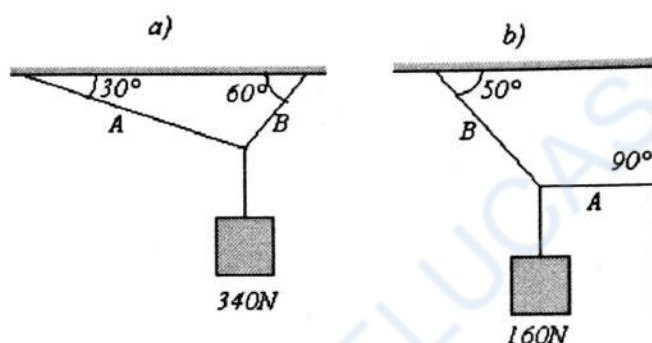
Solución N° 11

Continuamos la ejercitación:

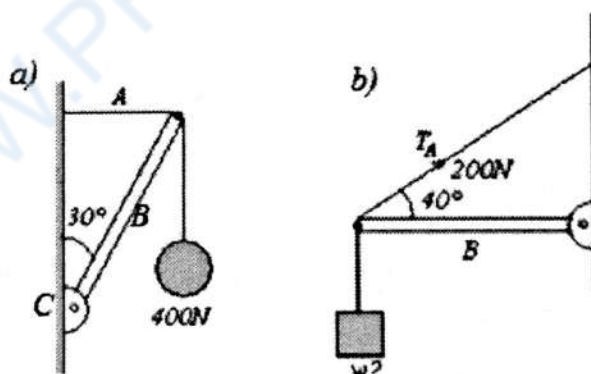
- 1) Calcule la tensión en cada cuerda de las figuras a), b) y c), si el peso del cuerpo suspendido es de 150N



- 2) Encuentre la tensión en las cuerdas A y B, de acuerdo a las condiciones de las figuras a) y b) siguientes:



- 3) Determine la tensión en la cuerda A y la compresión en el montante B de la figura a). La compresión en el montante es igual en magnitud, pero opuesta en dirección a la fuerza ejercida sobre el montante por el pivote C. Se supone despreciable el peso del montante B



- 4) Si el esfuerzo de ruptura del cable A de la figura b) precedente, es de 200N, ¿cuál es el máximo peso w que puede soportar este dispositivo? Suponemos despreciable el peso del montante B

Solución N°12

4.- Nociones sobre el equilibrio rotacional

Si se analizan detenidamente las figuras en los ejemplos y ejercicios vistos hasta ahora, se podrá apreciar que el equilibrio traslacional existe cuando las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son concurrentes en un punto y la suma vectorial es cero. Sin embargo, en muchos casos las fuerzas no son concurrentes y puede haber una tendencia a la rotación del sistema. Un ejemplo clásico es el del mecánico manipulando una llave para aflojar o ajustar un tornillo.

La tendencia a girar respecto a un eje se mide mediante una magnitud denominada momento de torsión. Si el cuerpo tiene la posibilidad de rotar y no se desea que gire, será necesario que el momento de torsión resultante sobre el cuerpo sea cero. Se deduce aquí la condición de equilibrio rotacional de un cuerpo.

Si la sumatoria de los momentos de torsión que actúan sobre un cuerpo con respecto a cualquier eje es cero, el cuerpo se encontrará en equilibrio rotacional. Se escribe:

$$\sum \vec{\tau} = \vec{0}$$

En donde $\vec{\tau}$ representa el momento de torsión (es una cantidad vectorial).

El momento de torsión aparece cuando hay dos fuerzas paralelas de igual magnitud pero de sentido opuesto, cuyas rectas de acción no coinciden; a este sistema de dos fuerzas se lo denomina cupla. En consecuencia, si sobre un cuerpo actúa una cupla, la sumatoria de estas dos fuerzas va a ser cero, con lo cual se cumple la condición de equilibrio traslacional; pero dicha cupla provocará la rotación del cuerpo con relación a un eje, no se cumplirá la condición de equilibrio rotacional que acabamos de mencionar. Dejamos pendiente el avance sobre este concepto y la definición del momento de torsión, para cuando Ud. curse Física I.

EJEMPLO 5: Equilibrio de una varilla

Una varilla liviana (peso despreciable) de longitud $L = 1,20m$ está fija a la pared por medio de un pivote en un extremo. En el otro extremo se cuelga un peso de $735N$. El sistema se mantiene en equilibrio por acción de una cuerda fija al techo, que forma 60° respecto a la horizontal. Calcule la tensión en la cuerda y las componentes horizontal y vertical de la fuerza de reacción sobre el pivote.

Respuesta: Dibujamos el diagrama del cuerpo libre de la varilla

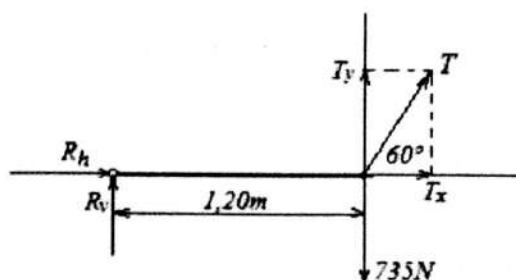


Figura 34

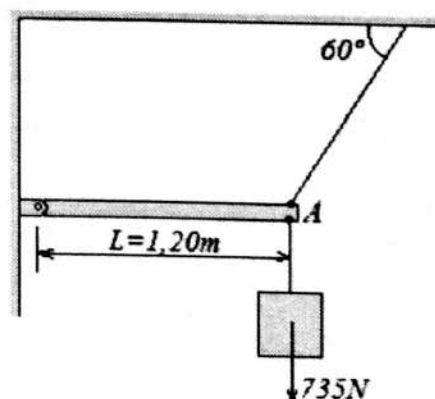


Figura 35

De acuerdo con lo mencionado anteriormente, el equilibrio del sistema se debe a la acción de tres fuerzas concurrentes cuya resultante es cero: la tensión T en la cuerda, el peso w y la reacción R del pivote sobre el puntal. El punto de concurrencia es el A , por lo que la fuerza R debe ser horizontal, vale decir que no tiene componente vertical ($R_v = 0$). Con respecto a R_h suponemos que actúa con el sentido indicado en la figura.

La tensión en la cuerda se considera descompuesta en dos componentes T_x y T_y , mientras que la reacción sobre el pivote actúa a lo largo del puntal, según se ha dicho.

Aplicamos a continuación la condición de equilibrio traslacional:

$$\sum F_x = R_h + T_x = 0$$

$$\sum F_y = T_y - 735\text{ N} = 0$$

Significa que:

$$T_y = 735\text{ N} . \text{ Como } T_y = T \cdot \sin 60^\circ ; \text{ resulta}$$

$$T = \frac{T_y}{\sin 60^\circ} = \frac{735\text{ N}}{0,866} = 849\text{ N} . \text{ Esta es la tensión de la cuerda.}$$

Determinamos ahora la componente x de T :

$$T_x = T \cos 60^\circ = 849\text{ N} \times 0,5 = 424,5\text{ N}$$

Reemplazando este valor en la ecuación de las componentes x de las fuerzas:

$$\sum F_x = R_h + T_x = 0$$

$$R_h = -T_x = -424,5\text{ N}$$

Nos da negativo, lo que significa que el sentido que habíamos supuesto en el diagrama del cuerpo libre para R_h no es correcto; debe ser sentido opuesto. El pivote tira del puntal hacia la izquierda.

$$R_h = -424,5\text{ N}$$

$$R_v = 0$$

EJEMPLO 6: El problema de la escalera

Una escalera uniforme de peso despreciable y de 8m de longitud apoya sobre una pared lisa, mientras que el suelo es rugoso y una fuerza de fricción se produce entre el suelo y la escalera, como indica la figura 36, que impide el resbalamiento de la escalera, para la posición en la que se encuentra el niño, a una distancia horizontal de 3,00m del punto O , donde la escalera apoya en el suelo. La escalera forma un ángulo de 60° respecto a la horizontal. Determine los valores de $\vec{N}$, $\vec{R}_p$ y $\vec{f}_s$

Respuesta:

También en este caso se nos presentan 3 fuerzas concurrentes: El peso $\vec{w}$ del niño, la reacción $\vec{R}_p$ de la pared sobre la escalera y la resultante de $\vec{N}$ y $\vec{f}_s$. Estas tres fuerzas concurren en el punto A . Para que el sistema esté en equilibrio, deben dar una resultante igual a cero. Necesitamos determinar la posición del punto A , y para ello debemos determinar la coordenada y_e

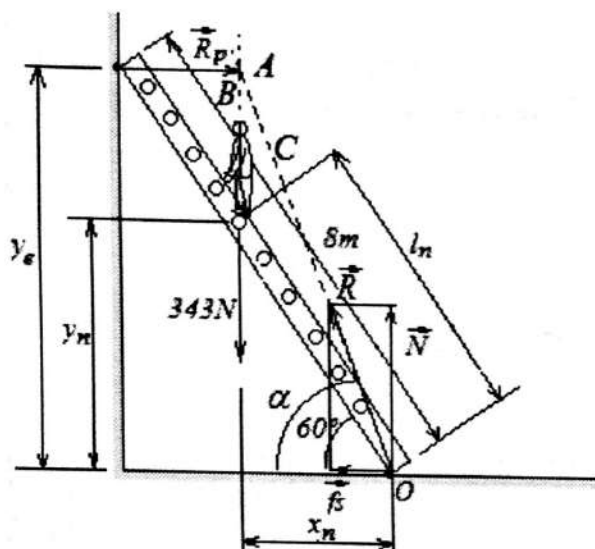


Figura 36

Referencias

- $\vec{R}_p$ Reacción de la pared sobre la escalera
- $\vec{N}$ Reacción del suelo sobre la escalera
- $\vec{f}_s$ Fuerza de rozamiento entre el suelo y la escalera
- x_n Coordenada del niño
- y_n Coordenada del niño
- y_e Distancia desde el piso a la recta de acción de $\vec{R}_p$
- l_n Distancia que sube el niño por la escalera
- A Punto de concurrencia de las tres fuerzas $\vec{R}_p$, $\vec{w}$ y la resultante de $\vec{N}$ y $\vec{f}_s$
- B Línea de acción de $\vec{w}$
- C Línea de acción de la resultante de $\vec{f}_s$ y $\vec{N}$

Aplicamos la condición de equilibrio traslacional:

$$\sum F_x = R_p - f_s = 0 \quad \therefore R_p = f_s$$

$$\sum F_y = N - 343 \text{ N} = 0 \quad \therefore N = 343 \text{ N}$$

A la coordenada y_e la determinamos por trigonometría, de los datos de la escalera:

$$y_e = 8 \text{ m} \times \sin 60^\circ = 6,9 \text{ m}.$$

Ahora calculamos el ángulo α :

$$\alpha = \arctan \frac{6,9 \text{ m}}{3 \text{ m}} = 66,5^\circ$$

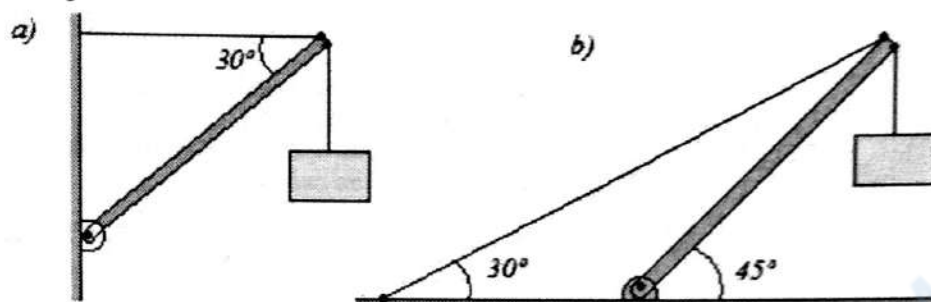
Con los datos obtenidos encontramos el valor de $\vec{R}$:

$$R = \frac{N}{\sin \alpha} = \frac{343 \text{ N}}{\sin 66,5^\circ} = 374 \text{ N}, \text{ y con este valor determinamos } \vec{f}_s \text{ y } \vec{R}_p:$$

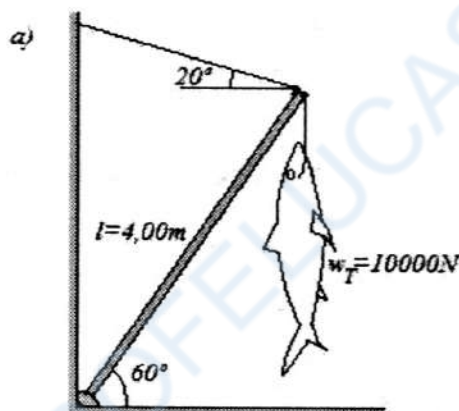
$$f_s = R \cos \alpha = 374 \text{ N} \times \cos 66,5^\circ = 149 \text{ N} = R_p$$

Procedemos ahora a realizar más ejercitación sobre estos temas; en la actividad N° 13 resolvemos algunos ejercicios de mayor elaboración, mientras que en la N° 14 ejecutamos problemas generales sobre cuerpos suspendidos.

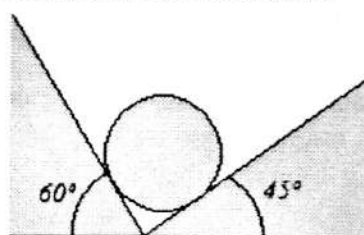
- 1) Calcule la tensión T en cada cable de las figuras a) y b) y la magnitud y dirección de la fuerza ejercida sobre el puntal por el pivote. El peso de la caja suspendida es w y el puntal tiene un peso despreciable.



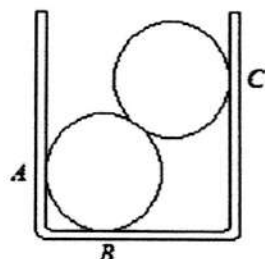
- 2) Un tiburón de 10000N cuelga de un cable unido a una barra que está articulada en la base. Calcule la tensión necesaria y las componentes horizontal y vertical de la fuerza ejercida sobre la base de la barra, para mantener el sistema en equilibrio. El peso de la barra no se considera



- 3) Una esfera uniforme cuyo peso es de 98,0N descansa sobre una cuña, como se ve en la figura. Determine las fuerzas que actúan sobre la esfera:



- 4) Dos pelotas uniformes de peso 0,75N y 2,00N de diámetro se colocan como se muestra en la figura, dentro de un recipiente de 3cm de ancho. Determine las fuerzas ejercidas por el recipiente en los puntos A, B y C y la fuerza que cada pelota ejerce sobre la otra.

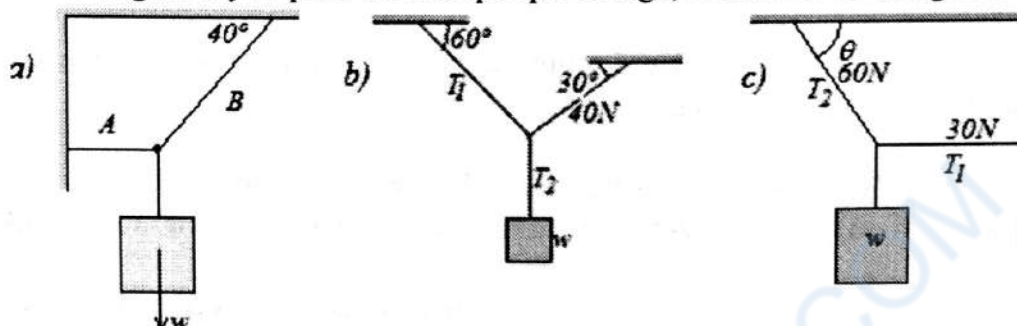


Solución N°13

a) Si la cuerda B de la figura, se rompe con tensiones mayores a 200N, ¿cuál es el peso máximo que puede soportar?

b) Calcule las tensiones T_1 y T_2 en el sistema en equilibrio que se muestra en la figura

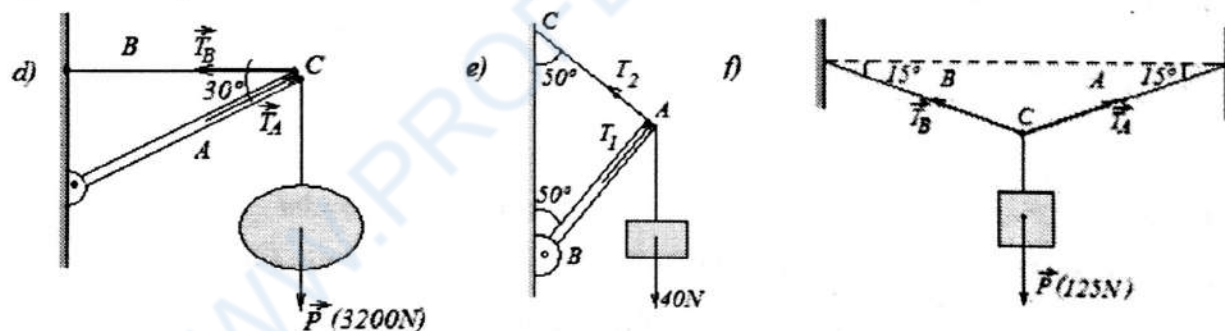
c) Encuentre el ángulo θ y el peso del cuerpo que cuelga, mostrado en la figura.



d) Un cuerpo es soportado por la estructura de la figura, en donde se supone que el peso del puntal A es despreciable. Calcule la magnitud de las fuerzas que actúan sobre la cuerda y el puntal, debido a un peso de 3200N.

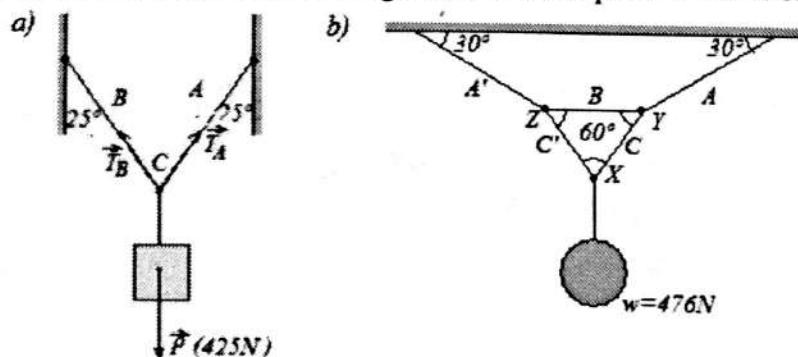
e) Calcule las fuerzas que la viga AB y la cuerda AC ejercen en A. Se supone que la viga y la cuerda tienen un peso despreciable

f) Encuentre las tensiones que soportan las cuerdas A y B, como consecuencia del cuerpo suspendido según se muestra en el dibujo.



g) Encuentre las tensiones que soportan las cuerdas A y B, como consecuencia del cuerpo suspendido según se muestra en el dibujo.

h) Encuentre la tensión en cada cuerda de la figura, siendo el peso w de 476N



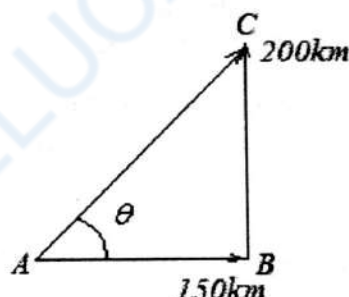
SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES DE PROCESO DE LA UNIDAD

- 10) 1) Es una fuerza de contacto. Si el balón está libre, sufrirá una deformación elástica y simultáneamente se pondrá en movimiento, lanzado hacia delante
- 2) Fuerza de contacto. A no ser que el viento sea muy fuerte, no habrá un movimiento perceptible de la pared.
- 3) Es una fuerza de acción a distancia. La luna se mueve con respecto a la tierra en una órbita aproximadamente circular.
- 4) Es una fuerza elástica que el resorte ejercerá sobre el cuerpo que está apoyado. (Fuerza de contacto). Si este cuerpo está libre de otras fuerzas, habrá movimiento.
- 5) Fuerza de acción a distancia. El movimiento dependerá de las condiciones de libertad de los cuerpos que integran el sistema.
- 6) Actúan dos fuerzas: la de gravedad, que es el peso de la hoja, es una fuerza de acción a distancia. La resistencia que ofrece el aire a la caída de la hoja es una fuerza de contacto. Hay movimiento.

11) 1).

$$R = \sqrt{150^2 + 200^2} = 250 \text{ km}$$

$$\theta = \text{tg}^{-1} \frac{200}{150} = 53^\circ$$



$$2) A_{1x} = A_1 \cdot \cos 37^\circ = 5 \text{ m} \times 0,8 = 4 \text{ m}$$

$$A_{1y} = A_1 \cdot \sin 37^\circ = 5 \text{ m} \times 0,6 = 3 \text{ m}$$

$$A_{2x} = A_2 \cdot \cos 125^\circ = 5 \text{ m} \times (-0,57) = -2,9 \text{ m}$$

$$A_{2y} = A_2 \cdot \sin 125^\circ = 5 \text{ m} \times 0,82 = 4,1 \text{ m}$$

$$A_{3x} = A_3 \cdot \cos 270^\circ = 5 \text{ m} \times 0 = 0 \text{ m}$$

$$A_{3y} = A_3 \cdot \sin 270^\circ = 5 \text{ m} \times (-1) = -5 \text{ m}$$

$$R_x = A_{1x} + A_{2x} + A_{3x} = 4 \text{ m} - 2,9 \text{ m} + 0 = 1,1 \text{ m}$$

$$R_y = A_{1y} + A_{2y} + A_{3y} = 3 \text{ m} + 4,1 \text{ m} - 5 \text{ m} = 2,1 \text{ m};$$

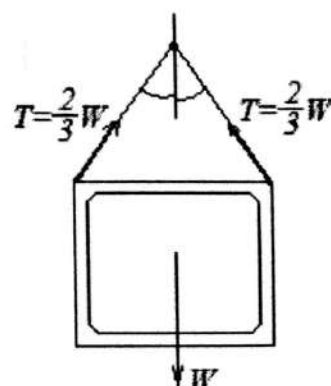
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{1,1^2 + 2,1^2} = 2,37 \text{ m}$$

$$\text{tg } \theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{2,1}{1,1} = 1,9; \theta = 62,4^\circ$$

$$3) R_x = A_x + B_x + C_x = 4,0 \text{ m} - 6,0 \text{ m} + 0 = -2,0 \text{ m}$$

$$R_y = A_y + B_y + C_y = 2,0 + 3,5 - 5,5 = 0$$

$$R = R_x = -2,0 \text{ m}; \theta = 180^\circ$$



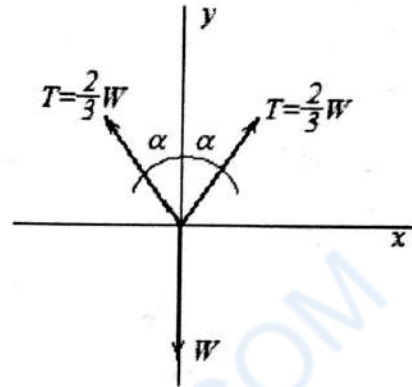
4) Utilizamos el método analítico:

Como las tensiones son iguales, la suma de las componentes y debe ser igual al peso w , o bien, cada componente y debe valer la mitad del peso:

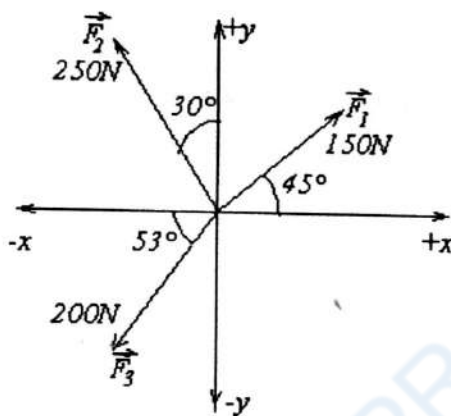
$$\frac{2}{3}w \cos \alpha = 0,5w$$

$$\cos \alpha = \frac{0,5}{0,67} = 0,75$$

$$\alpha = 41,4^\circ$$



5) Vamos a acostumbrarnos a trabajar con ángulos medidos con relación al eje $+x$



a) Calculamos las componentes de las fuerzas:

$$F_{1x} = F_1 \cos 45^\circ = 150 \times 0.707 = 106,1N$$

$$F_{1y} = F_1 \sin 45^\circ = 150 \times 0.707 = 106,1N$$

$$F_{2x} = F_2 \cos 120^\circ = 250 \times (-0,5) = -125N$$

$$F_{2y} = F_2 \sin 120^\circ = 250 \times (0,866) = 216,5N$$

$$F_{3x} = F_3 \cos 233^\circ = 200 \times (-0,602) = -120,4N$$

$$F_{3y} = F_3 \sin 233^\circ = 200 \times (-0,799) = -159,7N$$

Las componentes de la resultante son:

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = 106,1N + (-125N) + (-120,4N) = -139,3N$$

$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = 106,1N + 216,5N + (-159,7N) = 162,9N$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(-139,3)^2 + 162,9^2} = 214,3N$$

$$\alpha = \arctan \frac{R_y}{R_x} = \arctan \frac{162,9}{-139,3} = 130,55^\circ$$

b) La cuarta fuerza equilibrante del sistema debe ser igual y opuesta a la resultante, es decir, de magnitud $214,3N$ y ubicada a $310,55^\circ$ del eje $+x$; en el cuarto cuadrante

6) a) Calculamos las componentes de las fuerzas:

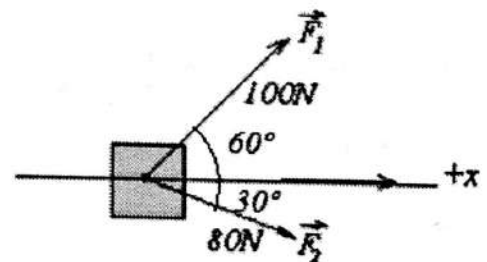
$$F_{1x} = 100 \cdot \cos 60^\circ = 50N$$

$$F_{1y} = 100 \cdot \sin 60^\circ = 86,6N$$

$$F_{2x} = 80 \cdot \cos 330^\circ = 69,3N$$

$$F_{2y} = 80 \cdot \sin 330^\circ = -40N$$

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} = 50N + 69,3N = 119,3N$$

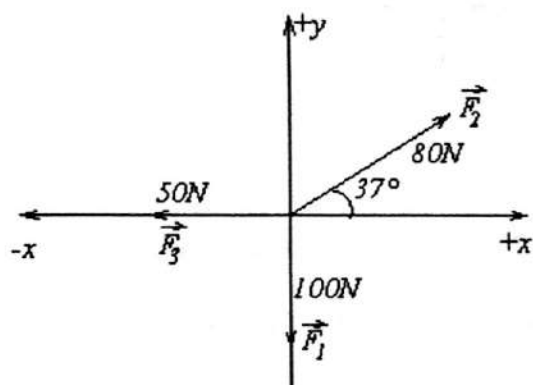


$$R_y = F_{1y} + F_{2y} = 86,6\text{ N} - 40\text{ N} = 46,6\text{ N}$$

Respuesta: la fuerza mínima que debería realizar la tercera persona deberá ser de 46,6N, orientada en la dirección de 270° respecto al eje $+x$.

c) El tercer individuo puede realizar evidentemente fuerzas superiores a ésta, en la dirección de 270° o en otras direcciones, pero el objeto no se movería en tal caso en la dirección del eje $+x$

7) De acuerdo con los datos suministrados, dibujamos las fuerzas en un sistema de coordenadas x-y:



Las componentes de las fuerzas, son:

$$F_{1x} = 0$$

$$F_{1y} = -100\text{ N}$$

$$F_{2x} = 80 \cos 37^\circ = 63,9\text{ N}$$

$$F_{2y} = 80 \sin 37^\circ = 48,1\text{ N}$$

$$F_{3x} = -50\text{ N}$$

$$F_{3y} = 0$$

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = 0 + 63,9\text{ N} - 50\text{ N} = 13,9\text{ N}$$

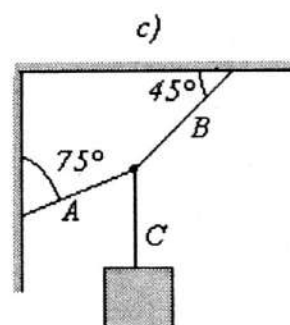
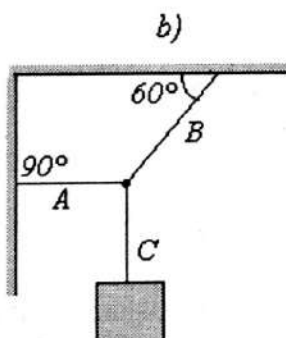
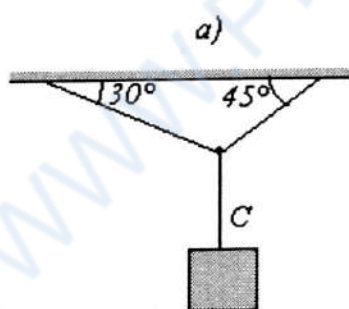
$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = -100\text{ N} + 0 + 48,1\text{ N} = -51,9\text{ N}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{13,9^2 + (-51,9)^2} = 53,7\text{ N}$$

$$\tan \alpha = \frac{R_y}{R_x} = \frac{-51,9}{13,9} = -3,73$$

$$\alpha = 360^\circ - 75^\circ = 285^\circ \text{ (Respecto al eje } +x)$$

12) 1)

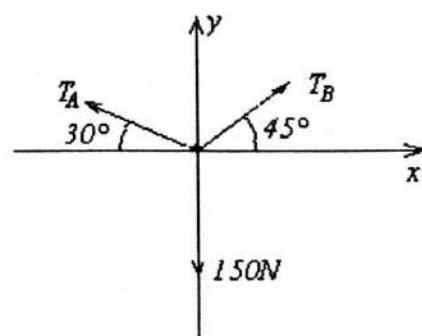


a) Trazamos un sistema de coordenadas con el origen coincidente con el punto de unión de las cuerdas. Conocemos sólo la dirección de las fuerzas y que el sistema se encuentra en equilibrio. La sumatoria de las componentes x e y de las fuerzas debe ser igual a cero.

$$T_{Ax} = T_A \cdot \cos 150^\circ = -0,866T_A$$

$$T_{Ay} = T_A \cdot \sin 150^\circ = 0,5T_A$$

$$T_{Bx} = T_B \cdot \cos 45^\circ = 0,707T_B$$



$$T_{By} = T_B \cdot \sin 45^\circ = 0,707T_B$$

Planteamos ahora dos ecuaciones, con las componentes:

$$-0,866T_A + 0,707T_B = 0$$

$$0,5T_A + 0,707T_B = 150N$$

Despejamos T_A de la primera y reemplazamos en la segunda:

$$T_A = \frac{0,707}{0,866}T_B = 0,82T_B$$

$$0,5(0,82)T_B + 0,707T_B = 150$$

$$1,115T_B = 150$$

$$T_B = \frac{150}{1,115} = 134,5N$$

$$T_A = 0,82 \times 134,5 = 110N$$

Respuesta:

$$T_A = 110N$$

$$T_B = 134,5N$$

$$T_C = 150N$$

b) Aplicamos el mismo procedimiento anterior:

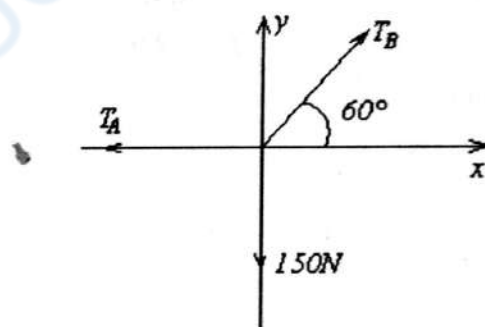
$$-T_A + 0,5T_B = 0$$

$$T_A = 0,5T_B$$

$$0,866T_B + 0 = 150$$

$$T_B = \frac{150}{0,866} = 173N$$

$$T_A = 0,5T_B = 0,5 \times 173 = 86,5N$$



c) Trazamos el diagrama del cuerpo libre para utilizar la misma técnica:

$$-0,97T_A + 0,707T_B = 0$$

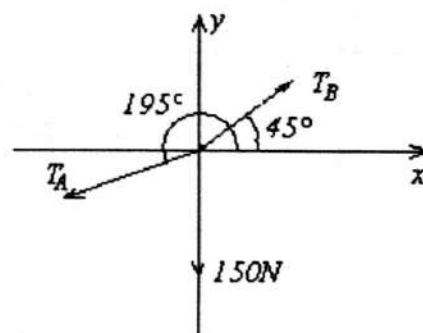
$$-0,26T_A + 0,707T_B = 150$$

$$-0,26(0,73)T_B + 0,707T_B = 150$$

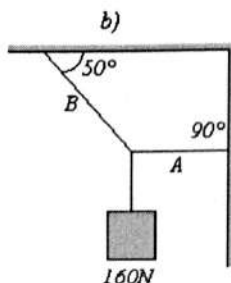
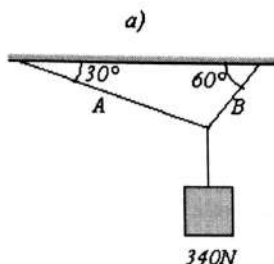
$$0,52T_B = 150$$

$$T_B = \frac{150}{0,52} = 288N$$

$$T_A = 0,73 \times 288 = 211N$$



2) Fijamos el sistema de coordenadas en el punto de unión de las cuerdas y aplicamos el procedimiento de siempre:



a)

$$T_A \cos 150^\circ + T_B \cos 60^\circ = 0$$

$$-0,87T_A + 0,5T_B = 0$$

$$T_A = \frac{0,5}{0,87} T_B = 0,57T_B$$

La segunda ecuación es:

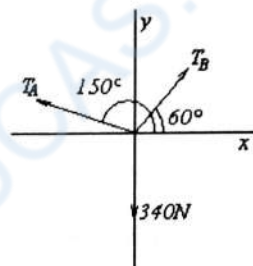
$$T_B \sin 60^\circ + T_A \sin 150^\circ = 340$$

$$0,87T_B + (0,5 \times 0,57)T_B = 340$$

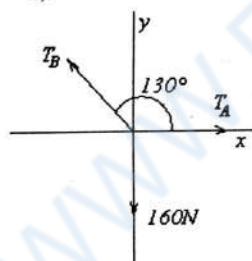
$$1,155T_B = 340$$

$$T_B = \frac{340}{1,155} = 294N$$

$$T_A = 0,57 \times 294N = 168N$$



b)



$$T_B \cos 130^\circ + T_A = 0$$

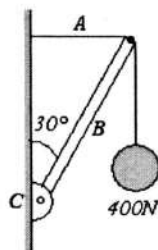
$$0,64T_B = T_A$$

$$T_B \sin 130^\circ + 0 = 160$$

$$T_B = \frac{160}{0,766} = 209N$$

$$T_A = 0,64 \times 209 = 134N$$

3) El peso de 400N es equilibrado por la tensión en A y la fuerza que el pivote ejerce sobre el montante, que trasladamos al punto de concurrencia con las otras dos fuerzas, como se muestra en el diagrama del cuerpo libre, que sigue:



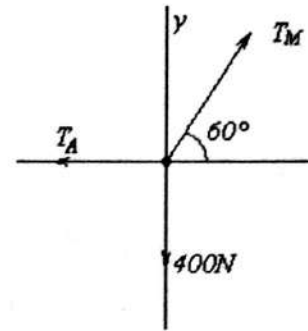
$$T_M \sin 60^\circ - 400 = 0$$

$$0,87T_M = 400$$

$$T_M = \frac{400}{0,87} = 460\text{ N}$$

$$T_M \cos 60^\circ - T_A = 0$$

$$T_A = T_M \cos 60^\circ = 230\text{ N}$$

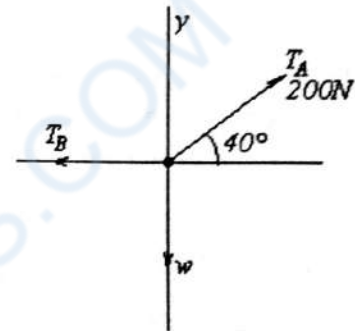


4) El diagrama del cuerpo libre es el siguiente:

Calculamos la componente y de T_A , para el esfuerzo máximo que soporta el cable

$$T_{Ay} = T_A \sin 40^\circ = 200 \times 0,64 = 128,6\text{ N}$$

Este valor, $w = 128,6\text{ N}$, deberá ser el máximo peso a colgar, que puede soportar el equilibrio del sistema. El montante B, que tiene un peso despreciable, no tiene componente en la dirección y



13 1) a) El diagrama del cuerpo libre de la viga y el objeto se ven en la figura:

$$\sum F_x = R_{pvx} - T_2 = 0 \quad ; \quad R_{pvx} = T_2$$

$$\sum F_y = R_{pvy} - T_1 = 0; \quad w = T_1;$$

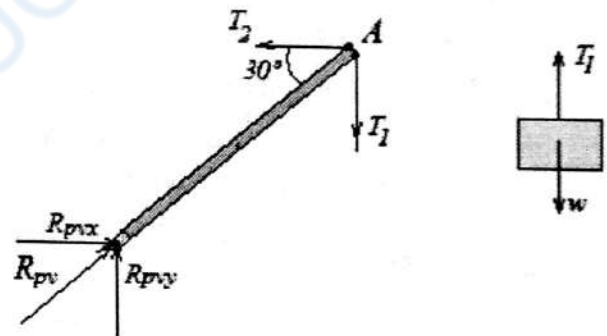
$$R_{pvy} = T_1 = w$$

La reacción sobre el pivote debe estar orientada en la dirección de éste pues debe ser concurrente con T_1 y T_2 en el punto A.

Podemos determinar T_2 a partir de:

$$T_2 = T_1 \times \tan 60^\circ = 1,73w = R_{pvx}$$

$$R_{pv} = \sqrt{R_{pvx}^2 + R_{pvy}^2} = \sqrt{(1,73w)^2 + w^2} = 2w$$

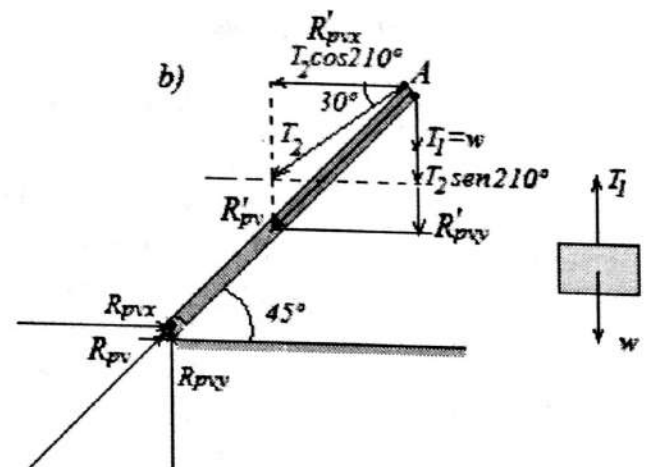


b) Vemos el diagrama del cuerpo libre del puntal y del objeto:

$$T_{2x} = T_2 \cos 210^\circ = -0,87T_2$$

$$T_{2y} = T_2 \sin 210^\circ = -0,5T_2$$

La reacción del pivote sobre el puntal está orientada en la dirección de la barra, es decir está a 45° respecto a la horizontal, pues debe concurrir al punto A. Esto nos permite determinar las componentes de R'_{pv} , la compresión ejercida por T_2 y w en la parte superior. Observe que por estar R'_{pv} a 45° , sus componentes x e y deben ser iguales. R_{pv} y R'_{pv} son iguales y opuestas, pero no son parejas de acción y reacción; ambas actúan sobre la barra y la comprimen.



$$-0,87 \times T_2 = -(w + 0,5 \times T_2)$$

$$(0,87 - 0,5) \cdot T_2 = w$$

$$T_2 = \frac{w}{0,37} = 2,7w$$

Las componentes de R'_{pv} son:

$$R'_{pvx} = 0,87 \times T_2 = 0,87 \times 2,7w = 2,35w$$

$$R'_{pvy} = w + 0,5 \times T_2 = w + 0,5 \times 2,7w = 2,35w$$

$$R'_{pv} = \sqrt{R'^2_{pvx} + R'^2_{pvy}} = \sqrt{(2,35w)^2 + (2,35w)^2} = 3,32w = R_{pv}$$

2) Trazamos los diagramas del cuerpo libre:

Nuevamente, la acción del pivote está orientada a 60° en la dirección de la barra. Por otra parte, en el extremo superior A actúa R'_{pv} , igual y opuesta a R_{pv}

$$T_x = T \cos(180^\circ - 20^\circ) = -0,94T$$

$$T_y = T \sin(180^\circ - 20^\circ) = 0,34T$$

$$R'_{pvx} = T_x = -0,94T$$

$$R'_{pvy} = T_y - w_T = 0,34T - w_T$$

Como R'_{pv} está orientada en la dirección de la barra, las componentes deben cumplir con la siguiente condición:

$$\operatorname{tg}(180^\circ + 60^\circ) = \frac{R'_{pvy}}{R'_{pvx}} = \frac{0,34T - w_T}{-0,94T} = 1,73$$

$$0,34T - w_T = 1,73 \times (-0,94w_T) = -1,63T$$

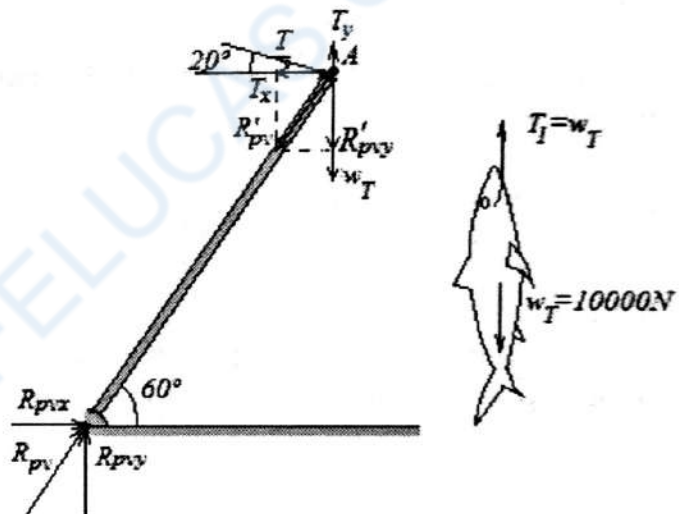
$$-w_T = -1,63T - 0,34T = -1,97T$$

$$T = \frac{w_T}{1,97} = 0,51w_T = 5100 \text{ N}$$

$$R'_{pvx} = -0,94 \times 0,51w_T = -0,48w_T = -4800 \text{ N}$$

$$R'_{pvy} = 0,34T - w_T = 0,34 \times 0,51w_T - w_T = -0,83w_T = 8300 \text{ N}$$

$$R'_{pv} = \sqrt{R'^2_{pvx} + R'^2_{pvy}} = \sqrt{(4800 \text{ N})^2 + (8300 \text{ N})^2} = 9588 \text{ N} = R_{pv}$$



3) Las fuerzas que actúan sobre la esfera son el peso y las reacciones R_A y R_B de la cuña, como se ve en el diagrama del cuerpo libre de la figura. Para que haya equilibrio, estas tres fuerzas deben ser necesariamente concurrentes.

Elegimos un sistema de coordenadas x-y con origen en el centro de la esfera y determinamos las componentes de las fuerzas:

$$R_{Ax} = R_A \cos 135^\circ = -0,707 R_A$$

$$R_{Ay} = R_A \sin 135^\circ = 0,707 R_A$$

$$R_{Bx} = R_B \cos 30^\circ = 0,87 R_B$$

$$R_{By} = R_B \sin 30^\circ = 0,5 R_B$$

Con estos datos aplicamos la condición de equilibrio de traslación:

$$\sum F_x = R_{Ax} + R_{Bx} = -0,707 R_A + 0,87 R_B = 0$$

$$\sum F_y = R_{Ay} + R_{By} - w = 0,707 R_A + 0,5 R_B - 98 \text{ N} = 0$$

De la primera ecuación despejamos R_A y reemplazamos en la segunda:

$$R_A = \frac{0,87}{0,707} R_B$$

$$0,707 \times \frac{0,87}{0,707} R_B + 0,5 R_B - 98 \text{ N} = 1,37 R_B - 98 \text{ N} = 0$$

$$R_B = \frac{98 \text{ N}}{1,37} = 71,5 \text{ N}$$

$$R_A = \frac{0,87}{0,707} \times 71,5 \text{ N} = 88 \text{ N}$$

4) A partir del diagrama del cuerpo libre aplicamos las condiciones de equilibrio traslacional:

$$\sum F_x = R_A - R_C = 0 ; R_A = R_C$$

$$\sum F_y = R_B - w - w = 0 ; R_B = 2w = 2 \times 0,75 \text{ N} = 1,50 \text{ N}$$

Observamos ahora el diagrama del cuerpo libre de las bolas: como el recipiente tiene 3cm de ancho la distancia d será de 1cm (observe la figura). Por otra parte, la distancia entre O y O' es de 2cm, por lo que

$$l = \sqrt{2^2 - 1^2} = 1,73 \text{ cm};$$

Calculamos ahora el ángulo α :

$$\alpha = \text{arc.tg.} \frac{d}{l} = \text{arc.tg.} \frac{1}{1,73} ; \alpha = 30^\circ$$

Por descomposición del peso w , encontramos el valor de R'_C , que es la acción que la bola superior ejerce sobre el recipiente; es igual y de sentido opuesto a R_C , la fuerza buscada. Observe el triángulo de fuerzas:

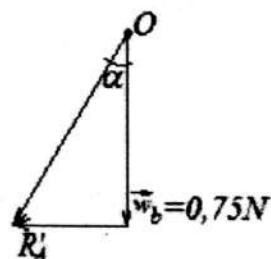
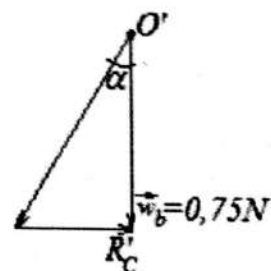
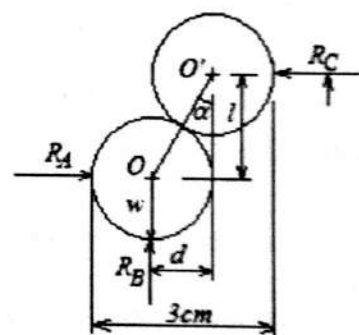
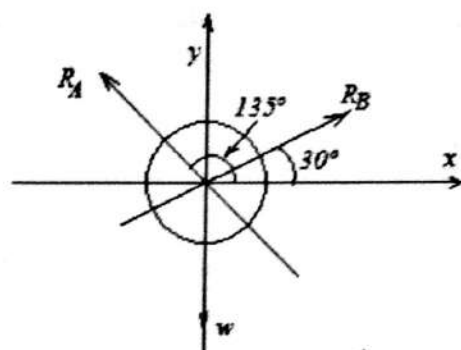
$$R'_C = w_b \times \text{tg } 30^\circ = 0,75 \text{ N} \times 0,578 = 0,433 \text{ N}$$

$$\vec{R}_C = -R'_C = -0,433 \text{ N}$$

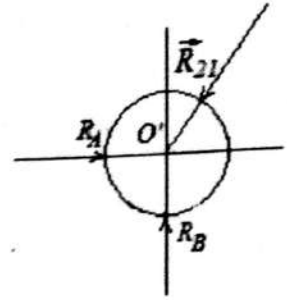
Para R_A empleamos el mismo procedimiento:

$$R'_A = w_b \times \text{tg } 30^\circ = 0,75 \text{ N} \times 0,578 = -0,433 \text{ N}$$

$$\vec{R}_A = -R'_A = 0,433 \text{ N}$$



Con respecto a la fuerza que ejerce cada bola sobre la otra, estas son parejas de acción y reacción. Observamos el diagrama del cuerpo libre de la bola inferior:



$$\sum F_x = R_A - R_{2lx} = 0 \quad ; \quad R_{2lx} = R_A = 0,433N$$

$$\sum F_y = R_B - w - R_{2ly} = 0 \quad ; \quad R_{2ly} = R_B - w = 1,50 - 0,75 = 0,75N$$

$$R_{2l} = \sqrt{R_{2lx}^2 + R_{2ly}^2} = \sqrt{0,433^2 + 0,75^2} = 0,866N$$

$$\vec{R}_{2l} = -\vec{R}_{l2}$$

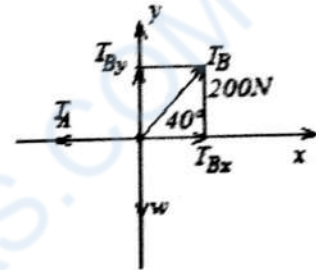
- 14 a) Dibujamos el sistema de coordenadas con las componentes y aplicamos las ecuaciones de equilibrio, suponiendo a T_B con su máximo valor:

$$\sum F_x = T_B \cos 40^\circ - T_A = 0$$

$$T_A = T_B \cos 40^\circ = 200N \times 0,766 = 153,2N$$

$$\sum F_y = T_B \sin 40^\circ - w = 0$$

$$w = T_B \sin 40^\circ = 200N \times 0,64 = 128,5N$$



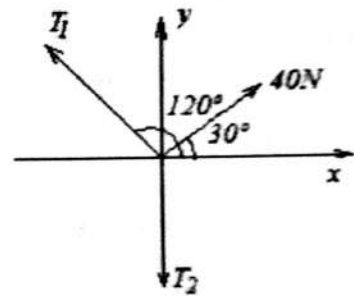
- b) Fijamos las coordenadas con el origen en el punto de unión de las cuerdas.

$$\sum F_x = T_1 \cos 120^\circ + 40N \cos 30^\circ = 0$$

$$T_1 = -\frac{40N \times 0,87}{(-0,5)} = 69,6N$$

$$\sum F_y = 40N \sin 30^\circ + T_1 \sin 120^\circ - T_2 = 0$$

$$T_2 = 40N \sin 30^\circ + 69,6N \cdot \sin 120^\circ = 20N + 60N = 80N$$



- c) Trazamos el sistema coordenado con origen en la unión de las cuerdas:

$$\sum F_x = 30N \cos 0^\circ + 60N \cos (180^\circ - \theta) = 0$$

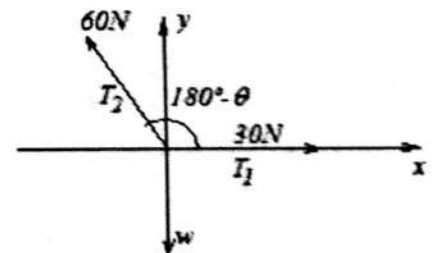
$$\cos (180^\circ - \theta) = \frac{-30N}{60N} = -0,5$$

$$(180^\circ - \theta) = \arccos(-0,5) = 120^\circ$$

$$\theta = 60^\circ$$

$$\sum F_y = 60N \sin 120^\circ - w = 0$$

$$w = 60N \cdot \sin 120^\circ = 52N$$



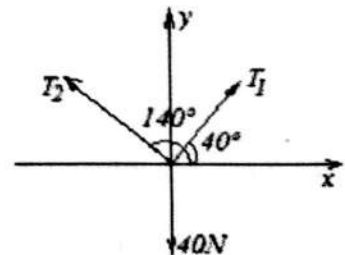
- d) Fijamos las coordenadas con el origen en el punto A. Esquematizamos las componentes en un sistema de coordenadas:

$$\sum F_x = T_1 \cos 40^\circ + T_2 \cos 140^\circ = 0$$

$$T_1 = -\frac{T_2 \times (-0,77)}{(0,77)} = T_2$$

$$\sum F_y = T_1 \sin 40^\circ + T_2 \sin 140^\circ - 40N = 0$$

$$0,64T_1 + 0,64T_2 - 40N = 0$$



$$T_1 = T_2 = \frac{40N}{1,28} = 31N$$

e) Trazamos un sistema de coordenadas con el origen en C, el punto de concurrencia de las fuerzas:

Las componentes de T_A y de T_B son:

$$T_{Ax} = T_A \cos 15^\circ = 0,97T_A$$

$$T_{Ay} = T_A \sin 15^\circ = 0,26T_A$$

$$T_{Bx} = T_B \cos 165^\circ = -0,97T_B$$

$$T_{By} = T_B \sin 165^\circ = 0,26T_B$$

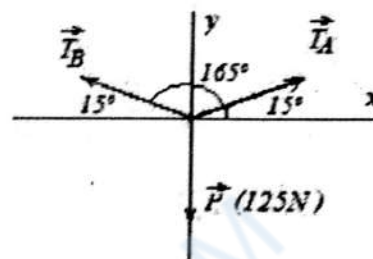
Las condiciones de equilibrio por componentes son:

$$\sum F_x = T_{Ax} + T_{Bx} = 0,97T_A - 0,97T_B = 0 \text{ Despejando } T_A:$$

$$T_A = \frac{0,97}{0,97} T_B ; T_A = T_B$$

$$\sum F_y = T_{Ay} + T_{By} - P = 0,26T_A + 0,26T_B - P = 0 ; 0,52T_B = P \text{ Observe que } T_A \text{ y } T_B \text{ son iguales:}$$

$$T_B = \frac{P}{0,52} = \frac{125N}{0,52} = 240N = T_A$$



f) Planteamos un sistema de coordenadas con origen en C, punto de concurrencia de las tres fuerzas:

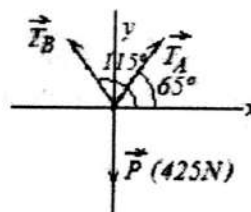
Las componentes de T_A y T_B son:

$$T_{Ax} = T_A \cos 65^\circ = 0,42T_A$$

$$T_{Ay} = T_A \sin 65^\circ = 0,91T_A$$

$$T_{Bx} = T_B \cos 115^\circ = -0,42T_B$$

$$T_{By} = T_B \sin 115^\circ = 0,91T_B$$



Las condiciones de equilibrio por componentes:

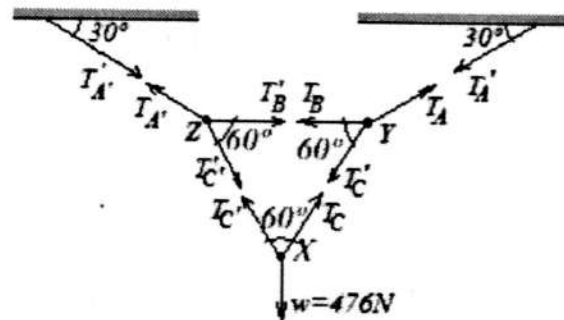
$$\sum F_x = T_{Ax} + T_{Bx} = 0,42T_A - 0,42T_B = 0$$

$$T_A = \frac{0,42}{0,42} T_B ; T_A = T_B$$

$$\sum F_y = T_{Ay} + T_{By} - P = 0,91T_A + 0,91T_B - P = 0$$

$$\text{Como } T_A = T_B \quad 1,82T_A = P \quad T_A = \frac{P}{1,82} = \frac{425N}{1,82} = 234N = T_B$$

h) Planteamos las condiciones de equilibrio en los nudos X, Y, Z



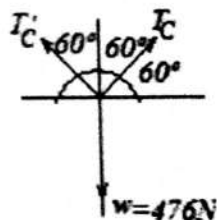
Nudo X:

$$T_{Cx} = T_C \times \cos 60^\circ = 0,5T_C$$

$$T_{Cy} = T_C \times \sin 60^\circ = 0,87T_C$$

$$T'_{Cx} = T_C \times \cos 120^\circ = -0,5T_C$$

$$T'_{Cy} = T_C \times \sin 120^\circ = 0,87T_C$$



$$\Sigma F_x = T_{Cx} - T'_{Cx} = 0$$

$$T_{Cx} = T'_{Cx} \text{ y también, por simetría } T_C = T_{C'}$$

$$\Sigma F_y = T_{Cy} + T'_{Cy} - w = 0$$

$$0,87T_C + 0,87T_C - w = 0$$

$$1,73T_C = w ; T_C = \frac{w}{1,73} = \frac{476 \text{ N}}{1,73} = 275 \text{ N} = T_{C'}$$

Nudo Y:

$$T_C = T'_{C'}$$

$$T_{Ax} = T_A \times \cos 30^\circ = 0,87T_A$$

$$T_{Ay} = T_A \times \sin 30^\circ = 0,5T_A$$

$$T_{Bx} = T_B \times \cos 180^\circ = -T_B$$

$$T_{By} = T_B \times \sin 180^\circ = 0$$

$$T'_{Cx} = T'_C \times \cos 240^\circ = -0,5T'_C = -0,5 \times 275 \text{ N} = -137,5 \text{ N}$$

$$T'_{Cy} = T'_C \times \sin 240^\circ = -0,87T'_C = -0,87 \times 275 \text{ N} = -238 \text{ N}$$

Planteamos ahora las condiciones de equilibrio del nudo Y:

$$\Sigma F_x = 0,87T_A - T_B - T'_{Cx} = 0$$

$$\Sigma F_y = T_{Ay} + T'_{Cy} = 0 ; T_{Ay} = -T'_{Cy} = 238 \text{ N}$$

$$T_A = \frac{T_{Ay}}{0,5} = \frac{238 \text{ N}}{0,5} = 476 \text{ N}$$

$$\Sigma F_x = 0,87 \times 476 \text{ N} - T_B - 238 \text{ N} = 0$$

$$-T_B = -414 \text{ N} + 238 \text{ N} = -176 \text{ N}$$

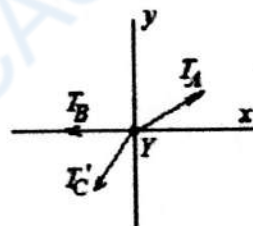
Por razones de simetría, no es necesario plantear las ecuaciones para el nudo Z

Resulta: (valores modulares)

$$T_C = T'_C = T_{C'} = T'_{C'} = 275 \text{ N}$$

$$T_B = T'_B = 176 \text{ N}$$

$$T_A = T'_A = T_{A'} = T'_{A'} = 476 \text{ N}$$



Unidad 4: CINEMÁTICA DEL PUNTO MATERIAL

Contenido de la unidad

1. Movimiento y trayectoria. Desplazamiento, velocidad y aceleración. Movimiento rectilíneo uniforme y uniformemente acelerado.
2. Modelización matemática: Aceleración y frenado uniforme de cuerpos móviles. Caída libre de los cuerpos
3. Ejemplos diversos y aplicaciones

1. Movimiento y trayectoria. Desplazamiento, velocidad y aceleración Movimiento rectilíneo uniforme y uniformemente acelerado.

Se define el movimiento de un cuerpo como el cambio de posición que éste sufre a medida que transcurre el tiempo. Para poder determinar el cambio de posición del cuerpo es necesario referirse a otro cuerpo que se toma como referencia.

Por otra parte, si la distancia del cuerpo en estudio con relación a la referencia no cambia, entonces el cuerpo se dice que está en reposo.

La referencia es indispensable para poder determinar el movimiento; muchas veces resulta difícil darnos cuenta de que nos movemos; cuando no tenemos otro cuerpo cercano para establecer comparaciones o cuando no experimentamos ninguna sensación.

Imagine que usted es uno de los pasajeros de un colectivo del transporte interurbano y viaja cómodamente sentado al igual que las demás personas. Por la ventanilla está viendo pasar hacia atrás los objetos y cosas que se encuentran al costado del camino a medida que el transporte automotor se va desplazando. Con respecto a los objetos que se encuentran al costado del camino, usted percibe que se está moviendo, mientras que está en reposo respecto a sus compañeros de viaje.

Sin embargo ocurre muchas veces que cuando la referencia no está cerca, el movimiento pasa desapercibido: supongamos por ejemplo estar dentro de un avión extremadamente silencioso que está volando a gran altura a velocidad constante; un pasajero observa desde la ventanilla la tierra miles de metros más abajo. El avión se mueve generalmente a gran velocidad, sin embargo el movimiento no es percibido; si ocurre un cambio en el régimen del vuelo originado por alguna fuerza externa, entonces el pasajero lo va a percibir como una aceleración.

Para estudiar analíticamente el movimiento, utilizamos un sistema de coordenadas cartesianas $x-y-z$; La posición del cuerpo en cualquier instante, está determinada por las coordenadas tomadas con relación al origen O . Según puede observarse en la figura 37, el cuerpo al moverse va ocupando los puntos A, B, C etc.,. Para cada uno de estos puntos trazamos los vectores $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$, etc desde el origen hasta el punto. Estos vectores son las posiciones sucesivas del cuerpo respecto al origen O del sistema de coordenadas.

La posición de un cuerpo se define como el vector trazado desde el origen del sistema de coordenadas hasta el punto

El movimiento del cuerpo describe una trayectoria en el sistema de coordenadas; ésta puede ser rectilínea, curva, circular, etc., lo que sirve para denominar al movimiento de tal manera.

Al moverse el cuerpo en el sistema de referencia decimos que se desplaza.

Se denomina desplazamiento del cuerpo entre dos puntos al vector diferencia entre las posiciones final e inicial

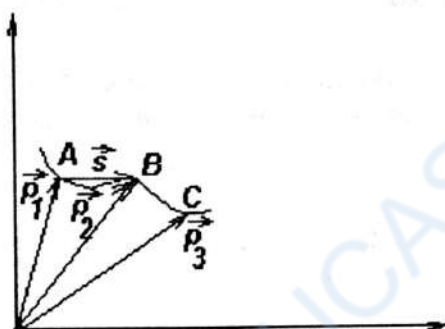


Figura 37

El desplazamiento es

$$\vec{s} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 \quad (1)$$

Debe distinguirse entre el desplazamiento del cuerpo, cuya definición acabamos de dar y la distancia recorrida, que es la longitud de la trayectoria seguida por el cuerpo.

Cuando la trayectoria es rectilínea y se orienta en una sola dirección, trayectoria y desplazamiento numéricamente coinciden, pero en el caso que esta sea curva, sus valores son diferentes.

Recuerde: el desplazamiento es una cantidad vectorial mientras que la distancia recorrida es escalar.

EJEMPLO 1: Desplazamiento en línea recta

Una persona se desplaza en línea recta desde A hasta B y luego vuelve a C. ¿Qué distancia recorrió? ¿Cuánto se desplazó? ¿Cuál es la rapidez promedio? ¿Cuál es la velocidad promedio?

Respuesta:

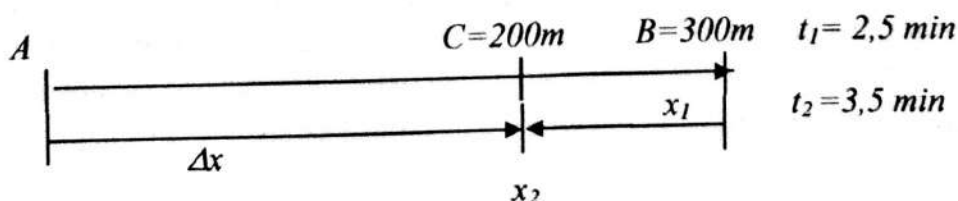


Figura 38

Recorrió: $\Delta d = x_1 + x_2 = 300m + 100m = 400m$

Se desplazó: $\Delta x = 200m$ en sentido de izquierda a derecha. ¡Atención! Si el móvil volvía al punto de partida el desplazamiento habría sido cero aunque no sería cero la distancia recorrida.

Se denomina rapidez promedio a la distancia del viaje, dividida por el tiempo total transcurrido. Para el ejemplo 1, resulta:

$$\text{Rapidez promedio} = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo total}} = \frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{400m}{210s} = 1,90 \frac{m}{s}$$

La velocidad promedio se distingue de la rapidez promedio, definiéndose como el desplazamiento dividido por el tiempo total transcurrido. La velocidad promedio es una cantidad vectorial y la dirección de este vector es coincidente con la del desplazamiento.

$$\text{Velocidad promedio} = \vec{v} = \frac{\text{Desplazamiento}}{\text{tiempo total}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{200m}{210s} = 0,952 \frac{m}{s}$$

Imaginemos un móvil que efectúa un recorrido dentro de la ciudad; el vehículo avanza en función del tránsito por las calles. En diferentes ocasiones debe frenar o detenerse debido a la al semáforo o al movimiento de otros vehículos. Al final, la rapidez o la velocidad se determinan dividiendo la distancia recorrida o el desplazamiento, que es la diferencia entre la posición final y la inicial, por el tiempo total transcurrido, pero estas cantidades no denotan los cambios que se produjeron en el movimiento del cuerpo durante el trayecto recorrido. Para poder definir el movimiento con mayor detalle, es necesario definir la velocidad en cualquier instante o punto específico. Esta es la rapidez instantánea o velocidad instantánea: si consideramos intervalos de tiempo cada vez más pequeños, para computar la distancia recorrida por el móvil y vamos realizando el cociente entre la distancia recorrida y el tiempo transcurrido, este cociente no es cero; su valor se aproxima cada vez más a la rapidez instantánea. La lectura del indicador de velocidad del auto, da por ejemplo ese valor.

Cuando el criterio anterior se aplica con el desplazamiento, arribamos al concepto de velocidad instantánea, es decir, qué tan rápido y en qué dirección y sentido se mueve el cuerpo en cada instante. Siendo la trayectoria descrita por el cuerpo una curva, la dirección de la velocidad instantánea en un punto resulta ser tangente a dicha curva en el punto. Este es un concepto particular que usted analizará más detalladamente durante el desarrollo formal de la asignatura.

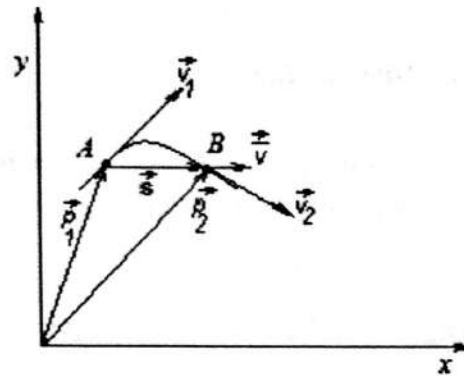


Figura 39

En la figura 39, $\vec{v}$ representa la velocidad promedio entre los puntos A y B , cuya dirección es coincidente con la de $\vec{s}$ el desplazamiento, mientras que $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ son las velocidades instantáneas en los puntos A y B respectivamente..

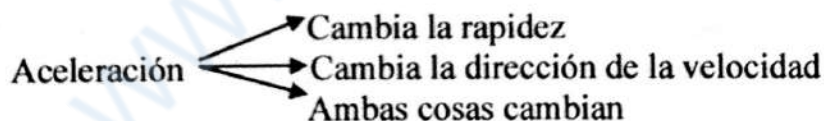
En el ejemplo del vehículo que se mueve por la ciudad, que relatamos anteriormente, la velocidad instantánea va cambiando permanentemente. El concepto de aceleración aparece cuando la velocidad cambia: se define la aceleración promedio, como el cambio de velocidad en un intervalo de tiempo.

La fórmula que se emplea para la aceleración promedio es:

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0} \quad (2)$$

Resulta necesario definir también aquí un valor instantáneo de la aceleración: la aceleración instantánea, que es la aceleración medida en un instante dado.

Teniendo en cuenta que la velocidad es una cantidad vectorial, que tiene magnitud dirección y sentido, el cuerpo puede tener aceleración si:



Salvo que el movimiento sea rectilíneo, la aceleración no tiene la misma dirección que la velocidad

Una aceleración negativa no significa necesariamente que el cuerpo desacelera o su velocidad disminuye. Los signos $+$ y $-$ indican sentidos respecto al eje de referencia. Si la velocidad y la aceleración tienen signos opuestos, el cuerpo desacelera; por ejemplo, si el cuerpo se mueve en dirección $-x$ y la aceleración es positiva, el cuerpo desacelera. En cambio, si tanto la velocidad como la aceleración son negativas, el valor numérico de la aceleración aumenta.

Tanto el desplazamiento, como la velocidad o la aceleración, son magnitudes vectoriales; es decir, que hay que precisar una dirección y un sentido para especificarlas en forma completa.

El sistema de coordenadas cartesianas de dos ejes x e y , resulta muy adecuado para mostrar la posición del cuerpo y la dirección de la velocidad y la aceleración, que no siempre son coincidentes entre sí. En el caso del movimiento rectilíneo es suficiente con utilizar solamente el eje x , que se traza coincidente con la dirección del movimiento.

Con estos conceptos más claros, realice a continuación la siguiente actividad.

Relacione con lo que ha leído.

15

- 1) Una persona camina en línea recta 225m y luego vuelve sobre sus pasos 47,3m. ¿Qué distancia recorrió? ¿Cuál ha sido su desplazamiento respecto a la posición inicial?
- 2) Un camionero de una empresa proveedora de alimentos, se desplaza por una autopista recta expresa, con la intención de entregar mercaderías en un supermercado. Para ello recorre 37,5km hasta la salida más próxima, pero luego debe volver, por un camino secundario paralelo a la autopista, 3,2 km. Si se desprecian los recorridos curvos por los puentes de salida hacia el camino secundario; a) ¿cuál fue la distancia recorrida? ; b) ¿cuál fue el desplazamiento del vehículo desde el punto de partida? ; c) Si demoró 45 minutos en la totalidad del recorrido, ¿cuáles fueron la rapidez y velocidad promedio en km./h?
- 3) Un automóvil se desplaza por una carretera con una rapidez promedio de 80km/h. ¿Qué distancia recorre el vehículo, en promedio, en 20 minutos de viaje?
- 4) Un maratonista completa la distancia de 41,82km en 2h 9minutos. ¿Cuál es su velocidad media en millas/h y en km/h? ¿Cuánto tiempo necesitó en promedio para recorrer una milla?
- 5) Dos personas corren en una pista, uno de ellos a 5m/s y el otro a 4,5m/s, una distancia de 1500m. Si el corredor más rápido le da una ventaja al más lento, ¿a qué distancia deberá encontrarse este último para que ambos corredores alcancen el punto de llegada al mismo tiempo?
- 6) Dos ciclistas parten desde un mismo punto de una carretera recta. Uno de ellos se desplaza con una rapidez constante de 25km/h mientras que el otro, más rápido, sale 5 minutos después alcanzándolo a los 30 minutos, contados desde la salida del primer corredor. ¿Cuál es la rapidez media del corredor más rápido y en qué posición se encuentran desde el punto de partida, cuando se encuentran?
- 7) Un anuncio publicitario establece que un automóvil alcanza 100km/h en 9s. ¿Cuál es la aceleración media del vehículo?
- 8) Una partícula que se mueve en línea recta tiene una velocidad de 9m/s en un tiempo $t = 0$, la que se incrementa a 20m/s en $t = 15$ s. Determine la aceleración promedio

Solución N°15

Cuando la trayectoria es una recta, el movimiento es denominado rectilíneo; si además no hay aceleración, decimos que es un movimiento rectilíneo uniforme. Nos referimos a continuación a este tipo de movimiento.

Observemos la representación del desplazamiento y de la velocidad del cuerpo en función del tiempo, que se muestra en la figura 40:

La gráfica del desplazamiento en función del tiempo es una línea recta, lo que nos indica que el cuerpo experimenta iguales desplazamientos en intervalos iguales. Teniendo en cuenta la definición de la velocidad, encontramos al hacer el cociente entre el desplazamiento y el intervalo de tiempo, que es constante.

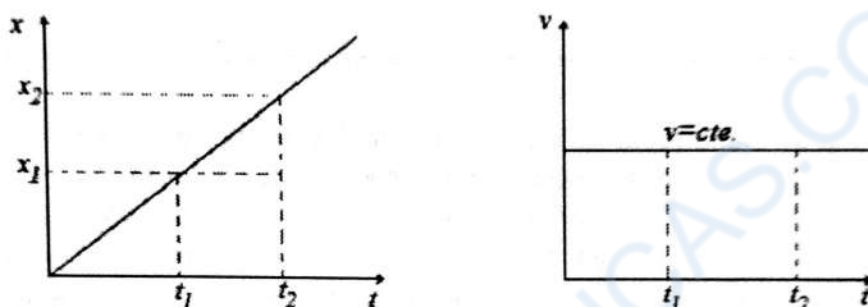


Figura 40 Representación del desplazamiento y la velocidad en función del tiempo

El gráfico velocidad-tiempo muestra una línea horizontal, lo que se corresponde con una velocidad que se mantiene constante a medida que transcurre el tiempo.

$$\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \vec{v} = \text{constante.} \quad (3)$$

Hemos dicho que cuando la velocidad cambia, hay aceleración, el movimiento es acelerado. Un caso particular de movimiento acelerado se presenta cuando la aceleración es constante. Se denomina: movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

Analicemos, las representaciones gráficas del desplazamiento, la velocidad y la aceleración en función del tiempo, para el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, mostradas en la figura 41:

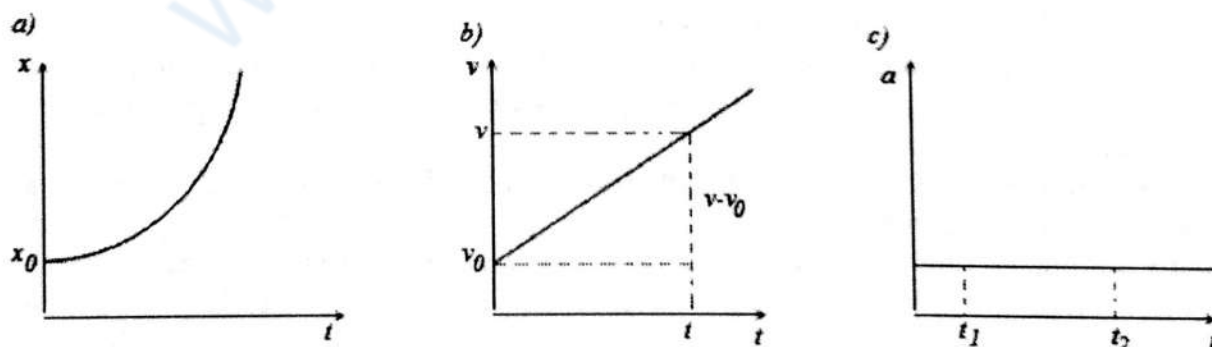


Figura 41 Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado

El gráfico c) nos muestra que la aceleración es constante, mientras que la velocidad, que está representada en el gráfico b), va aumentando uniformemente según lo indica la recta

representativa. La velocidad que en un instante inicial $t=0$ es v_0 , se va incrementando gradualmente hasta que, transcurrido un tiempo t , ha alcanzado el valor v .

Un cambio de velocidad $\Delta v = v - v_0$, ha tenido lugar en un tiempo $\Delta t = t - 0 = t$. Por lo tanto, la aceleración es:

$$a = \frac{v - v_0}{t}.$$

De aquí resulta despejando:

$$v = v_0 + at \quad (4)$$

Entre v_0 y v , podemos definir un valor medio de la velocidad que es la media aritmética entre el valor inicial y el valor final:

$$\bar{v} = \frac{v + v_0}{2} \quad (5)$$

Dado que la velocidad media es también igual a

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - 0},$$

Una expresión para el desplazamiento en función del tiempo resulta, combinando esta última expresión con las dos anteriores:

$$\begin{aligned} x - x_0 &= \bar{v}t = \frac{v + v_0}{2}t = \frac{v_0 + at + v_0}{2}t \\ x - x_0 &= \frac{2v_0 + at}{2}t = v_0t + \frac{at^2}{2}. \end{aligned}$$

Despejando x :

$$x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2 \quad (6)$$

Observe que la expresión (6) es una ecuación de segundo grado en t . Esto significa que el gráfico a) de la figura 41, que representa a x en función de t , es una curva de segundo grado, es decir, una parábola.

Finalmente, también es posible obtener una relación entre las velocidades, la aceleración y el desplazamiento. Esto se logra combinando las ecuaciones de manera de eliminar el tiempo t :

Escribimos directamente la ecuación que resulta de estas operaciones:

$$v^2 - v_0^2 = 2a.x \quad (7)$$

A las ecuaciones numeradas desde (4) hasta (7), se las denomina ecuaciones cinemáticas del movimiento. Mediante su utilización es posible resolver todo tipo de problema relacionado con el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

Un ejemplo importante del movimiento uniformemente acelerado es la caída libre de los cuerpos. Si un cuerpo que está suspendido en el aire cerca de la superficie es soltado, comienza a caer bajo la acción de fuerza de gravedad terrestre. Galileo determinó experimentalmente que todos los cuerpos que caen en estas condiciones, lo hacen con la misma aceleración, salvo pequeñas perturbaciones ocasionadas por la resistencia del aire y la forma del cuerpo.

A la aceleración con que caen los cuerpos en las proximidades de la superficie terrestre se la denomina aceleración de la gravedad y se la indica con la letra g .

El valor de g presenta en realidad pequeñas variaciones según la latitud terrestre, la altura, concentraciones de minerales en la superficie, etc.; por ejemplo, en los polos es $g \cong 9,83m/s^2$, mientras que en el ecuador $g \cong 9,78m/s^2$. Se toma como valor normal $g = 9,80665m/s^2$. En los textos de física se adopta $g = 9,80m/s^2$ y esta cantidad de cifras significativas es generalmente adecuada para todos los cálculos.

Para el estudio de la caída libre de los cuerpos, se considera que g es constante y actúa en forma vertical a la superficie terrestre a la cual, por otra parte, se la supone plana. Un eje de referencia y dirigido verticalmente hacia arriba es utilizado para determinar la posición del cuerpo que cae. Pueden utilizarse las mismas ecuaciones cinemáticas que se plantearon para el movimiento uniformemente acelerado.

Como se está utilizando el eje vertical y , en las ecuaciones anteriormente planteadas para el movimiento uniformemente acelerado debe reemplazarse x por y y a por $-g$. Colocamos $-g$ porque la aceleración de la gravedad actúa en sentido contrario a la orientación del eje y , que apunta hacia arriba. Tenga cuenta que cuando reemplacemos el valor numérico de g en las fórmulas, deberemos hacerlo con signo positivo.

Las ecuaciones cinemáticas de la caída libre vertical resultan entonces:

$$v = v_0 - g.t \quad (8)$$

$$y = y_0 + v_0.t - \frac{1}{2}.g.t^2 \quad (9)$$

$$y - y_0 = \frac{v + v_0}{2}.t \quad (10)$$

$$v^2 - v_0^2 = -2g \cdot y \quad (11)$$

Al final de la guía, incluimos un resumen con todas las ecuaciones matemáticas empleadas, para que le resulte más fácil memorizarlas, pero, tenga en cuenta que para aprender a utilizarlas, debe practicar con ellas. Por esto es que resulta fundamental que practique y comprenda la ejercitación que su profesor le va a proponer. Por favor, no permanezca en actitud pasiva durante las ejercitaciones. ¡Debe participar activamente!

2. Modelización matemática: aceleración y frenado uniforme de cuerpos móviles. Caída libre de los cuerpos

La ejercitación que vamos a encarar a partir de este momento, estará centrada en estos dos importantes ejemplos: la aceleración y frenado uniforme de cuerpos y la caída libre vertical. Vamos a aplicar, en la resolución de ejercicios, las ecuaciones cinemáticas anteriormente vistas.

EJEMPLO 2: Frenado uniforme de un vehículo

Un automóvil se desplaza con velocidad constante de $90,0 \text{ km/h}$, cuando el conductor ve, $90,0 \text{ m}$ más adelante, que un animal se cruza. Inmediatamente aplica los frenos imprimiendo una desaceleración constante de $a = -3,0 \text{ m/s}^2$ hasta detenerse. Averigüe si el vehículo atropella al animal

Respuesta:

De acuerdo con los datos provistos, el vehículo sufre una desaceleración constante, en virtud de que el conductor aplica los frenos de una manera uniforme y constante.

Comenzamos reduciendo $90,0 \text{ km/h} = \frac{90,0 \text{ km}}{1 \text{ h}} \times \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \times \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} = 25,0 \text{ m/s}$.

Los datos que disponemos son: $v_0 = 25,0 \text{ m/s}$; $v = 0$, ya que el vehículo frena por completo; la distancia a la que se encuentra el animal en el instante de iniciar la frenada $d = 90 \text{ m}$ y la aceleración de frenada $a = -3,0 \text{ m/s}^2$. Se nos pide determinar la distancia de frenado para comprobar si el vehículo embiste al animal.

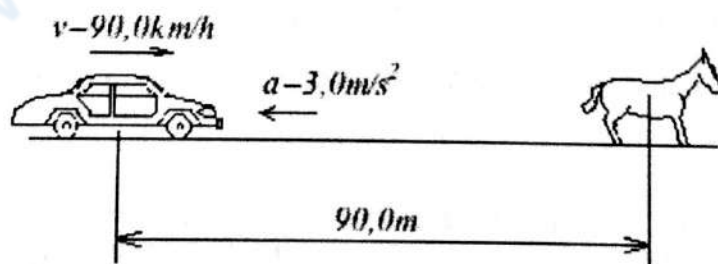


Figura 42

Observando las ecuaciones cinemáticas, vemos que la más apropiada para utilizar es la (8):

$$v^2 - v_0^2 = 2a \cdot x.$$

Reemplazando los valores:

$$0 - (25,0 \text{ m/s})^2 = 2(-3,0 \text{ m/s}^2) \cdot x.$$

Despejamos x .

$$-6m/s^2 \times x = (-25m/s)^2; x = \frac{625m^2/s^2}{6,0m/s^2} = 104m > 90m.$$

En consecuencia, el vehículo embestirá al animal.

EJEMPLO 3: Caída vertical de un objeto.

Un objeto es dejado caer desde la azotea de un edificio, tardando 1,6s en llegar al suelo. ¿Cuál es la altura del edificio?

Respuesta:

Como el cuerpo es dejado caer, su velocidad inicial es $v_0 = 0$.

Aplicamos la ecuación (10), tomando $y_0 = 0$; es decir, fijamos el origen de referencia sobre la azotea del edificio

$$y = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 = -\frac{1}{2} \cdot 9,8 \cdot 1,6^2 = -12,54m.$$

Esta es la altura de caída. La altura del edificio respecto al suelo es entonces de +12,54m.

EJEMPLO 4: Tiro vertical

Una persona arroja una pelota hacia arriba con una velocidad inicial de 10m/s ¿Qué altura alcanza y cuanto tiempo tarda ésta en regresar a las manos de la persona?

Respuesta:

Para determinar la altura que alcanza, utilizamos la expresión (12):

$$v^2 - v_0^2 = -2g \cdot y.$$

Como el cuerpo momentáneamente se detiene al alcanzar la altura máxima, resulta $v = 0$.

$$-v_0^2 = -2g \cdot y \therefore y = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{10^2}{2 \cdot 9,8} = \frac{100}{19,6} = 5,1m$$

Para determinar el tiempo de caída se utiliza la expresión (9):

$$v = v_0 - g \cdot t; 0 = v_0 - g \cdot t; t = \frac{v_0}{g} = \frac{10}{9,8} = 1,02s$$

El tiempo de descenso es el mismo, como puede comprobarse aplicando la expresión (10):

$$y = y_0 + v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

Pero al caer, la pelota parte con una velocidad inicial $v_0 = 0$ y al llegar a las manos de la persona, la altura final es $y = 0$, habiendo empezado a caer desde una altura $y_0 = 5,1m$.

$$0 = y_0 - \frac{1}{2} g \cdot t^2; 0 = 5,1 - \frac{1}{2} \cdot 9,8 \cdot t^2.$$

Despejamos t :

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 5,1}{9,8}} = 1,02s$$

Con lo que se demuestra que el tiempo de descenso de la pelota es igual al de ascenso. El tiempo total hasta que la pelota vuelve hasta las manos de la persona es entonces de 2,04s

Recuerde: en los problemas de caída libre, la dirección positiva para las velocidades y los desplazamientos es hacia arriba

Realice ahora la ejercitación que se propone a continuación:

16

- 1) Un objeto se deja caer desde el techo de un edificio cuya altura es de 25m. ¿Con qué velocidad llega al suelo y cuánto tiempo tarda en caer?
- 2) Un niño arroja una piedra desde un puente hacia abajo, con una velocidad de 5m/s, la que llega al agua luego de un tiempo $t = 1,2s$. Calcule la altura del puente.
- 3) Un avión comienza el aterrizaje con una velocidad de 100m/s en el momento de tocar tierra. Si la desaceleración de frenado es de $-5,5m/s^2$, determine si puede aterrizar en una pista de 800m de largo.
- 4) Una pelota es lanzada verticalmente hacia arriba, volviendo a las manos de la persona 5s después. ¿Cuál fue la velocidad inicial de la pelota y qué altura máxima alcanzó?
- 5) Un vehículo acelera desde el reposo durante 6s a $3,2m/s^2$. Mantiene constante la velocidad alcanzada durante 35s y comienza a desacelerar a $-2,5m/s^2$ hasta detenerse. ¿Qué distancia recorrió?
- 6) Una motocicleta se encuentra detenida en un semáforo, acelerando uniformemente a $3,8m/s^2$ en el momento que la luz cambia a verde. En el mismo momento, un automóvil que se desplaza a velocidad uniforme de 65km/h la rebasa. La motocicleta mantiene la aceleración hasta que alcanza 80km/h. ¿Qué tiempo tarda la motocicleta en alcanzar al automóvil?. ¿A qué distancia del semáforo lo alcanza? ¿Qué velocidad tiene la moto en ese instante?
- 7) Un automóvil viaja a 90km/h y en determinado momento aplica los frenos desacelerando uniformemente hasta detenerse 75m más adelante. ¿Cuál fue la desaceleración y cuánto tiempo transcurrió?
- 8) ¿A qué velocidad inicial debe arrojarse una pelota al aire para que alcance una altura de 25m? ¿Cuánto tiempo permanece en el aire?
- 9) Usted ha visto que un movimiento rectilíneo puede ser uniforme; es decir, de velocidad constante, o acelerado. Con el movimiento curvilíneo, ¿ocurre lo mismo?
- 10) Elija la opción más completa:
La aceleración es el cambio de velocidad por unidad de tiempo; ¿en qué condiciones puede producirse?
 - a) Cuando hay un cambio en el módulo de la velocidad, pero la dirección de ésta no cambia.
 - b) Cuando hay un cambio en la dirección de la velocidad, aunque el módulo de ésta se mantenga constante.
 - c) Cuando cambia tanto la magnitud como la dirección de la velocidad.
 - d) Todas las respuestas anteriores son correctas.

Solución 16

- 1) Un tren que se desplaza a velocidad constante e igual a 20m/s , ingresa a la boca de un túnel y 25s después la locomotora comienza a emerger de él. ¿Cuál es la longitud del túnel en metros?
- 2) Dos niños parten simultáneamente desde el mismo punto corriendo en direcciones opuestas; uno a una velocidad de $+3,5\text{m/s}$ y el otro a -4m/s ¿Cuál es la distancia que los separa después de 12s ?
- 3) Dos automóviles viajan en la misma dirección a lo largo de una autopista recta, uno a 75km/h y el otro a 90km/h . Suponiendo que empiezan en el mismo punto y en el mismo instante, ¿qué tiempo de ventaja obtiene el auto más rápido al llegar a un destino a 45km de distancia? Exprese el resultado en minutos y segundos.
- 4) Un automóvil viaja a 75km/h , cuando el conductor aplica los frenos al advertir que un animal está en el camino. Si el auto desacelera uniformemente con una aceleración de $-4,2\text{m/s}^2$, ¿qué tan lejos llega el vehículo antes detenerse?
- 5) En un instante determinado dos vehículos que se desplazan con velocidad constante en una carretera, se encuentran separados una distancia de $3,6\text{km}$. El automóvil que lleva la delantera se desplaza a 20m/s , mientras que el que va atrás lo hace a 28m/s . ¿Cuánto tarda el vehículo más veloz en alcanzar al primero y a cuántos kilómetros, medidos desde la posición inicial del automóvil más retrasado, se encuentran?
- 6) Un tren que recorre una vía recta y horizontal, tiene una rapidez inicial de $35,0\text{km/h}$. Se aplica una aceleración uniforme de $+1,50\text{m/s}^2$, mientras el tren recorre 200m . a) ¿Cuál es la rapidez del tren, en km/h , al final de esta distancia? b) ¿Qué tiempo, en segundos, le toma al tren recorrer los 200m ?
- 7) ¿Un avión recorre 280m en una pista antes de despegar; parte del reposo, se mueve con aceleración constante y está en el aire al cabo de $8,00\text{s}$ de carretear. a) ¿Qué rapidez en m/s tiene el avión cuando despegue? b) Exprese el resultado en km/h
- 8) Durante una picada, un auto acelera desde el reposo con aceleración constante de $9,0\text{m/s}^2$ a lo largo de una distancia recta de 100m . Para ganar la picada, el conductor deberá emplear un tiempo de $4,5\text{s}$ o menos ¿Lo logra el conductor? ¿Qué aceleración mínima se requiere en caso de que no lo logre?
- 9) Desde un puente se arroja una piedra verticalmente hacia abajo. Cuatro segundos después cae al agua con una velocidad final de 60m/s . ¿Cuál era la velocidad inicial? ¿A qué altura sobre el agua está el puente?
- 10) El conductor de un auto desea pasar un camión que viaja a velocidad constante de $20,0\text{m/s}$. Inicialmente el auto se mueve también a $20,0\text{m/s}$ y su paragolpes delantero está a $24,0\text{m}$ atrás del paragolpes delantero del camión. El auto adquiere una aceleración constante de $0,600\text{m/s}^2$ y regresa al carril cuando su paragolpes trasero está $26,0\text{m}$ delante del frente del camión. La longitud del auto es de $4,50\text{m}$, mientras que la del camión es de $21,0\text{m}$ a) ¿Cuánto tiempo le lleva al auto la maniobra? b) ¿Qué distancia recorre el auto en ese tiempo? c) ¿Qué rapidez final tiene el auto?

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES DE PROCESO DE LA UNIDAD

15 1) La distancia recorrida es de $225m + 47,3m = 272,3m$.

El desplazamiento es $\Delta x = 225m - 47,3m = 177,7m$.

2) a) Distancia recorrida: $37,5km + 3,2km = 40,7km$.

b) Desplazamiento: $37,5km - 3,2km = 34,3 km$.

c) Tiempo en horas: $45/60 = 0,75h$

Rapidez promedio: Trayectoria recorrida / Tiempo = $40,7/0,75 = 54,26km./h$

Velocidad promedio: Desplazamiento / Tiempo = $34,3 / 0,75 = 45,73km$.

3) 20 minutos $20/60 = 0,33h$

$$\vec{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} ; \Delta x = \vec{v} \cdot \Delta t = 80km/h \times 0,33h = 26,4km \approx 26km$$

$$4) 41,82km = \frac{41,82}{1,609} = 26millas ; 2h + \frac{9}{60} = 2,15h$$

$$\vec{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{41,82km}{2,15h} = 19,5km/h = \frac{26millas}{2,15h} = 12,1millas/h ; \Delta t = \frac{60}{12,1} = 5min.$$

$$5) \text{ Corredor 1: } \vec{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} ; \Delta t_1 = \frac{\Delta x}{\vec{v}} = \frac{1500m}{5m/s} = 300s$$

$$\text{Corredor 2: } \Delta t_2 = \frac{1500m}{4,5m/s} = 333,3s$$

$$\text{Diferencia de tiempo: } \Delta t = \Delta t_2 - \Delta t_1 = 33,3s$$

En 33,3s el corredor más lento recorre: $\Delta x = 33,3 \cdot 4,5 = 150m$.

Esta es la ventaja que debe darle el corredor más rápido

$$6) 25km/h = 25/3,6 = 6,9m/s, \Delta t_1 = 5min. = 300s ; \Delta t_2 = 30min. = 1800s$$

$$\text{Para el corredor 1: } x = v_1 \cdot \Delta t_2$$

$$\text{Para el corredor 2: } x = v_2 \cdot (\Delta t_2 - 300)$$

$$\text{Igualando ambas expresiones } v_1 \cdot \Delta t_2 = v_2 \cdot (\Delta t_2 - 300)$$

De donde se despeja:

$$v_2 = \frac{v_1 \cdot \Delta t_2}{\Delta t_2 - 300} = \frac{6,9 \cdot 1800}{1800 - 300} = 8,28m/s = 29,8 \approx 30km/h$$

La distancia recorrida es:

$$x = 6,9m/s \cdot 1800s = 12420 \approx 12,4km$$

$$x = 8,3m/s \cdot 1500s = 12,4km$$

Ambos resultados coinciden, siendo esta una forma de corroborar el procedimiento.

7) $100km/h = 100/3,6 = 27,8m/s$. Como el cuerpo parte desde el reposo, la velocidad inicial es $v_0 = 0$

$$\vec{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{\Delta t} = \frac{27,8m/s - 0}{9s} = 3,1m/s^2$$

$$8) \bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{\Delta t} = \frac{20 \text{ m/s} - 9 \text{ m/s}}{15 \text{ s}} = 0,73 \text{ m/s}^2$$

16) 1) Aplicamos la expresión $v^2 - v_0^2 = -2g \cdot y$ y suponemos el sistema de referencia sobre el techo:

Como el cuerpo se dejó caer, $v_0 = 0$.

$$v^2 = -2g \cdot y = -2 \cdot 9,8 \cdot (-25) = 490; v = \sqrt{490} = -22,1 \text{ m/s}.$$

Observe que se tomó -25 m (dirigida hacia abajo) y se adoptó la raíz negativa (la raíz da dos signos).

$$v = v_0 - g \cdot t; \quad t = \frac{v - v_0}{-g} = \frac{-22,1 \text{ m/s} - 0}{-9,8 \text{ m/s}^2} = 2,26 \text{ s}$$

$$2) v = v_0 - g \cdot t = -5 \text{ m/s} - 9,8 \text{ m/s}^2 \cdot 1,2 \text{ s} = -16,8 \text{ m/s}$$

Aplicamos ahora: $v^2 - v_0^2 = -2g \cdot y$

$$(-16,8 \text{ m/s})^2 - (-5 \text{ m/s})^2 = -2 \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 \cdot y; \quad y = \frac{282,2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} - 25 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{2 \cdot 9,8 \text{ m/s}^2} = 13,1 \text{ m}$$

3) Se utiliza la expresión: $v^2 - v_0^2 = -2a \cdot x$;

$$\text{como } v = 0; \quad x = \frac{v_0^2}{2 \cdot a} = \frac{(100 \text{ m/s})^2}{2 \times 5,5 \text{ m/s}^2} = 909 \text{ m} > 800 \text{ m}. \text{ El avión no alcanza a aterrizar.}$$

4) Para subir tarda la mitad del tiempo, es decir $2,5 \text{ s}$.

$$v = 0 = v_0 - g \cdot t; v_0 = g \cdot t = 9,8 \text{ m/s}^2 \times 2,5 \text{ s} = 24,5 \text{ m/s}$$

$$-2g \cdot y = v^2 - v_0^2; \quad -2g \cdot y = -v_0^2; \quad y = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{(24,5 \text{ m/s})^2}{2 \times 9,8 \text{ m/s}^2} = 30,6 \text{ m}$$

5) Velocidad que alcanza: $v = a \cdot t = 3,2 \text{ m/s}^2 \times 6 \text{ s} = 19,2 \text{ m/s}$

$$\text{Distancia recorrida mientras acelera: } x_1 = \frac{1}{2} a \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 3,2 \text{ m/s}^2 \times (6 \text{ s})^2 = 57,6 \text{ m}$$

$$\text{Distancia recorrida a velocidad constante: } x_2 = v \cdot t = 19,2 \text{ m/s} \times 35 \text{ s} = 672 \text{ m}$$

Distancia recorrida en la desaceleración hasta detenerse:

$$v^2 - v_0^2 = -2a \cdot x_3; x_3 = \frac{v_0^2}{2 \cdot a} = \frac{(19,2 \text{ m/s})^2}{2 \times 2,5 \text{ m/s}^2} = 73,7 \text{ m}$$

$$\text{Distancia total recorrida: } x = x_1 + x_2 + x_3 = 57,6 \text{ m} + 672 \text{ m} + 73,7 \text{ m} = 803 \text{ m}$$

6) $v_a = 65 \text{ km/h} = 65/3,6 = 18 \text{ m/s}$. ; $v_m = 80/3,6 = 22,2 \text{ m/s}$

Tiempo que tarda la moto en alcanzar $22,2 \text{ m/s}$:

$$v = a \cdot t_1; t_1 = \frac{v_m}{a} = \frac{22,2 \text{ m/s}}{3,8 \text{ m/s}^2} = 5,84 \text{ s}$$

Distancia recorrida por la moto en $5,84 \text{ s}$:

$$x_1 = \frac{1}{2} a t^2 = 64,8m$$

Distancia recorrida por el auto en 5,84s:

$$x_2 = v_a \cdot t = 5,84 \cdot 18 = 105m. \text{ Diferencia } \Delta x = x_2 - x_1 = 105 - 65 = 40m$$

Si el tiempo en que la moto alcanza al auto es t_2 :

$$x_3 = v_m \cdot t_2 = 22,2t_2;$$

Para el automóvil:

$$x_3 = 40 + v_a \cdot t_2 = 40 + 18t_2$$

Igualando por x_3 :

$$22,2t_2 = 40 + 18t_2; (22,2 - 18)t_2 = 40; t_2 = \frac{40}{4,2} = 9,5s$$

$$\text{Calculamos ahora: } x_3 = 22,2m/s \cdot 9,5s = 211m;$$

$$\text{Distancia total } x = x_1 + x_3 = 211m + 65m = 276m$$

Comprobación: Distancia recorrida por el auto en $t = 5,84s + 9,5s = 15,34s$:

$$x_a = v_a \cdot t = 18 \cdot 15,34 = 276m$$

$$7) 90km/h = 90/3,6 = 25m/s.$$

Utilizamos la ecuación: $v^2 - v_0^2 = 2ax$;

$$0 - v_0^2 = 2ax \quad ; \quad a = -\frac{(25m/s)^2}{2 \times 75m} = -\frac{625 \frac{m^2}{s^2}}{150m} = -4,2m/s^2$$

$$v = 0 = v_0 + a \cdot t; t = -\frac{v_0}{a} = -\frac{25}{-4,2} = 6s$$

$$8) v^2 - v_0^2 = -2g \cdot y; \quad -v_0^2 = -2g \cdot y; \quad v_0 = \sqrt{2 \cdot g \cdot y} = \sqrt{2 \cdot 9,8m/s^2 \cdot 25m} = 22,1m/s$$

$$\text{Tiempo de subida: } v = v_0 - g \cdot t_s; \quad t_s = \frac{v_0}{g} = \frac{22,1m/s}{9,8m/s^2} = 2,26s.$$

El tiempo de vuelo es el doble

$$t = 2t_s = 4,52s$$

9) No; siempre que cambia la dirección de la velocidad, es porque hay aceleración. Un movimiento curvilíneo podría ser de rapidez constante, pero su velocidad no sería constante, pues cambia la dirección.

10) La opción correcta es la d

17) 1) En 25s el tren recorre exactamente la longitud del túnel, de manera que:

$$L = v \cdot \Delta t = 20 \cdot 25 = 500m$$

$$2) \text{ La velocidad de un niño respecto al otro es de } v = 3,5 + 4 = 7,5m/s$$

$$\text{La distancia que los separa es: } d = v \cdot t = 7,5 \cdot 12 = 90m$$

Otra forma sería calculando distancia recorrida por cada niño:

$$d_1 = 3,5 \cdot 12 = 42m$$

$$d_2 = 4 \cdot 12 = 48m \text{ (en dirección contraria)}$$

$$d = d_1 + d_2 = 42 + 48 = 90m$$

$$3) \Delta t_1 = \frac{\Delta s}{v_1} = \frac{45km}{75km/h} = 0,6h = 0,6 \cdot 60 = 36min$$

$$\Delta t_2 = \frac{45km}{90km/h} = 0,5h = 30min$$

El automóvil más veloz le saca 6 minutos de ventaja, es decir, 360s.

$$4) \text{ Comenzamos por reducir la velocidad de km/h a m/s: } \frac{75}{3,6} = 20,8m/s$$

Utilizamos la expresión $v^2 - v_0^2 = -2ax$; en donde $v = 0$ ya que el auto se detiene.

$$-v_0^2 = -2ax \text{ . Despejamos } x:$$

$$x = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{(20,8m/s)^2}{2 \times 4,2m/s^2} = 51,5m \text{ . El signo negativo de la aceleración ya fue considerado en la fórmula.}$$

Otra alternativa:

Calculamos el tiempo del automóvil hasta detenerse:

$$v = 0 = v_0 - at; t = \frac{v_0}{a} = \frac{20,8m/s}{4,2m/s^2} = 4,95s$$

Luego la distancia recorrida:

$$x = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} a \cdot t^2 = 20,8m/s \cdot 4,95s - \frac{1}{2} \cdot 4,2m/s^2 \times (4,95s)^2 = 51,5m$$

Si el animal estuviera a una distancia inferior a ésta, el automóvil lo embestiría

5) Hay simultaneidad en el tiempo:

$$x = 28 \cdot t$$

$$x - 3,6 = 20 \cdot t$$

Sustituyendo una ecuación en la otra:

$$28m/s \times t - 3,6km = 20m/s \times t$$

$$8m/s \times t = 3,6km = 3600m$$

$$t = \frac{3600m}{8m/s} = 450s = 7,5min.$$

$$x = 28t = 28m/s \times 450s = 12600m = 12,6km$$

6) Reducimos km/h a m/s:

$$35,0km/h = \frac{35,0}{3,60} = 9,72m/s$$

Como conocemos la velocidad inicial, la aceleración y la distancia recorrida, aplicamos:

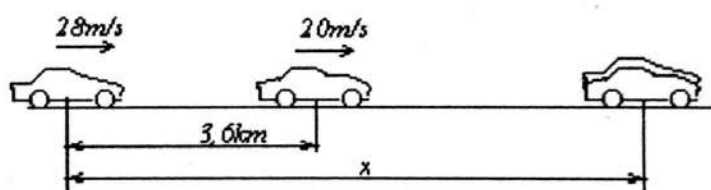
$$v = \sqrt{v_0^2 + 2 \cdot a \cdot x} = \sqrt{(9,72m/s)^2 + 2 \times 1,50m/s^2 \times 200m} = 26,3m/s = 94,9km/h$$

El tiempo que toma recorrer 200m, se obtiene de:

$$x = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2, \text{ despejando } t, \text{ o bien a partir de } v = v_0 + a \cdot t \text{ pues se trata del mismo tiempo:}$$

$$t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{26,3 - 9,72}{1,50} = 11,1s$$

7) Calculamos en primer término la aceleración constante del avión, a partir de la fórmula:



$x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} a t^2$, debido a que $v_0 = 0$. De aquí despejamos a

$$a = \frac{2x}{t^2} = \frac{2 \times 280m}{(8,00s)^2} = 8,75m/s^2. \text{ Como } v \text{ es igual a:}$$

$$v = a t = 8,75m/s^2 \times 8,00s = 70m/s = 252km/h$$

8) Aplicamos la expresión:

$$y = \frac{1}{2} a t^2 \quad \therefore$$

$$t = \sqrt{\frac{2y}{a}} = \sqrt{\frac{2 \times 100m}{9,0 \frac{m}{s^2}}} = 4,7s$$

No lo logra. Para lograrlo, la aceleración debería ser igual o mayor que:

$$a \geq \frac{2y}{t^2} = \frac{2 \times 100m}{(4,5s)^2} = 9,88 \frac{m}{s^2}$$

9) Aplicamos la expresión $v = v_0 + g t$. De aquí despejamos la velocidad inicial:

$$v_0 = v - g t = 60m/s - 9,8 \times 4s = 20,8m/s$$

Para determinar la altura del puente utilizamos:

$$y = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 = 20,8m/s \times 4s + 0,5 \times 9,8m/s^2 \times (4s)^2 = 161,6m$$

10) La longitud total de sobre paso del auto es de:

$x_{0a} = 24m + 21m + 26m + 4,5m = 75,5m$. En el mismo tiempo de sobrepaso el camión recorre una distancia $x_c = v_c \times t$

La distancia total que debe recorrer el auto es entonces:

$$x_a = 75,5m + v_c \times t$$

El desplazamiento del auto en su movimiento acelerado es también:

$$x_a = v_{0a} \times t + \frac{1}{2} a \times t^2 \quad \text{Igualando las dos expresiones:}$$

$$v_{0a} \times t + \frac{1}{2} a \times t^2 = 75,5m + v_c \times t$$

Pero $v_{0a} \times t = v_c \times t$ Por lo tanto, queda la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{2} a \times t^2 = 75,5m \quad \text{De aquí despejamos el tiempo:}$$

$$t = \sqrt{\frac{2 \times 75,5m}{a}} = \sqrt{\frac{2 \times 75,5m}{0,600m/s^2}} = 15,9s$$

La distancia recorrida por el auto es:

$$x_a = v_{0a} \times t + \frac{1}{2} a \times t^2 = 20m/s \times 15,9s + \frac{1}{2} 0,600m/s^2 \times (15,9m/s^2)^2 = 394m$$

$$v_a = v_{0a} + a \times t = 20m/s + 0,60m/s^2 \times 15,9s = 29,5m/s$$

Guía suplementaria de problemas

a) Primera parte: Problemas con resultados incluidos

Unidades. Magnitudes. Conversión de unidades

1.- Un cubo mide 5 pulgadas por lado. ¿Cuál es el volumen del cubo en unidades del S.I.?

R: $0,00205\text{m}^3$

2.- El límite de velocidad en una carretera interestatal de Estados Unidos es de 65 millas/h

a) ¿Cuál es la equivalencia de esta velocidad en km/h y b) ¿en pies por segundo?

R: $104,6\text{km/h}$ $95,3\text{pie/s}$

3.- Un motor Nissan tiene un cilindro cuyo volumen es de 1600cm^3 y un diámetro de cilindro de 84mm. Expresa estas unidades en pulgadas cúbicas y en pulgadas.

R: $97,6\text{pulg}^3$ y $3,31$ pulg.

4.- Un electricista debe instalar un cable subterráneo desde la carretera hasta una casa. Si la casa está ubicada a 1,2 millas hacia el bosque, ¿cuántos pies de cable se necesitarán?

R: 6336pie

5.- Un galón estadounidense es un volumen equivalente a 231pulg^3 . Suponga que el tanque de gasolina de un automóvil equivale aproximadamente a un paralelepípedo de 18pulg. de largo, 16pulg. de ancho y 12pulg. de altura. ¿Cuántos galones puede contener este tanque?

R: 15,0 galones.

Vectores

6.- Un río fluye hacia el sur con una velocidad de 20km/h . Un bote tiene una velocidad máxima de 50km/h en aguas quietas. ¿Cuál es la velocidad máxima que puede alcanzar el bote en este río, cuando se dirige directamente hacia el oeste? ¿En qué dirección viajará el bote?

R: $53,9\text{km/h}$, $21,8^\circ$ dirección sudoeste.

7.- Se necesita ejercer una fuerza de 200N para arrastrar un cajón sobre un piso de hormigón. Si se le ata una cuerda que forme un ángulo de 30° con la horizontal, ¿qué tirón se tiene que dar a lo largo de la cuerda para moverlo?

R: $230,9\text{N}$

8.- Cuatro cuerdas se han atado a un anillo formando ángulos rectos entre sí. Las tensiones, respectivamente 40N , 80N , 70N y 20N . ¿Cuál es la magnitud de la fuerza resultante sobre el anillo?

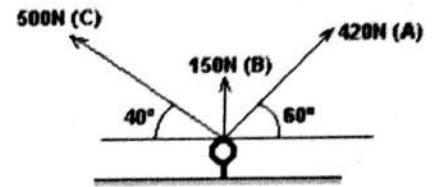
R: $67,1\text{N}$ $116,6^\circ$

9.- Determine la resultante de las siguientes fuerzas por el método de las componentes: $\mathbf{A} = (200\text{N}, 30^\circ)$; $\mathbf{B} = (300\text{N}, 330^\circ)$ y $\mathbf{C} = (400\text{N}, 250^\circ)$

R: $518,8\text{N}$ $304,8^\circ$

10.- Tres embarcaciones ejercen fuerzas sobre un gancho de amarre. ¿Cuál es la fuerza resultante sobre el gancho si la embarcación A ejerce una fuerza de 420N, la embarcación B ejerce una fuerza de 150N y la embarcación C ejerce una fuerza de 500N?

R: 853N 101,7°

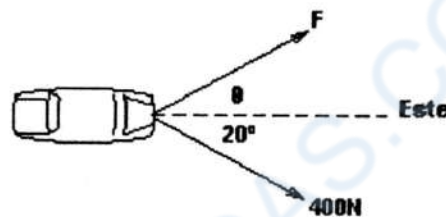


11.- ¿Qué tercera fuerza debe añadirse a las siguientes dos fuerzas, de modo que la resultante sea cero: 40N, 110° y 85N, 185° ?

R: 102,9N 342,9°

12.- ¿Cuáles son la magnitud F y la dirección θ de la fuerza necesaria para tirar del auto directamente al este con una fuerza resultante 800N?

R: 445,6N 17,9°



13.- Un cable está atado al extremo de una viga. ¿Qué tirón con un ángulo 40° se requiere para producir una fuerza efectiva de 200N a lo largo de la viga?

R: 261N

14.- Un avión intenta seguir su ruta hacia el oeste con rumbo a un aeropuerto. La velocidad del avión es de 600km/h. Si el viento tiene una velocidad de 40km/h y sopla en una dirección de 30° Sudoeste, ¿en qué dirección se orientará el avión y cuál será su velocidad relativa con respecto al suelo?

R: 634,9km/h 181,8°

Producto escalar: Trabajo de una fuerza

15.- Un jardinero empuja una caja de herramientas a lo largo de una entrada de cochera, aplicando una fuerza de 32,5N dirigida hacia abajo con un ángulo de 22,4° respecto a la horizontal. ¿Cuánto trabajo se realiza, si la caja se mueve 2,25m horizontalmente?

R: $W=67,5J$

16.- Una fuerza neta que actúa sobre un gran diccionario realiza un trabajo de 46,3J al moverlo una distancia de 13,3m a lo largo de una superficie sin fricción que forma un ángulo de 36° con el eje x horizontal. La componente x de la fuerza es dos veces mayor que la componente y vertical. ¿Cuáles son la magnitud y dirección del vector fuerza?

R: 3,53N; 26,6° respecto a la horizontal.

17.- Una grúa tira de un automóvil a velocidad constante, usando un cable de acero. Al jalar horizontalmente el vehículo una distancia de 1,2km, la grúa efectúa un trabajo de 1,10MJ (mega joules) ¿Cuál fue la tensión promedio del cable?

R: 916,7N

18.- En un muelle, una grúa levanta contenedores de un peso de 8000N, desde el piso hasta una altura de 8,00m, los fija sobre la borda y los deposita en la bodega, 2,50m por debajo del nivel del piso. Sin tomar en cuenta la fricción, ¿cuánto trabajo hace esta grúa cada vez que un ubica un contenedor en la bodega del carguero?
R: 20000J

19.- Una cuerda arrastra un bloque una distancia de 20m por el piso contra una fricción constante de 30N. La cuerda forma un ángulo de 35° con el piso y tiene una tensión de 60N. a) ¿Qué trabajo realiza la fuerza de 60N? b) ¿Cuál es el trabajo desarrollado por la fuerza de fricción? c) ¿Cuál es el trabajo resultante realizado?
R: a) 984J b) -600J c) 384J

Cinemática del punto material

20.- Un cuerpo se mueve partiendo del reposo, con una aceleración constante de 8m/s^2 . Calcular a) la velocidad instantánea v al cabo de 5s, b) la velocidad media $\bar{v}$ durante los primeros 5 segundos del movimiento y c) la distancia recorrida desde el reposo en los primeros 5 segundos
R: a) 40m/s b) 20m/s c) 100m

21.- Un automóvil recorre 360km en 5h. Calcule la velocidad media en km/h y m/s .
R: 72km/h, 20m/s

22.- Un automóvil marcha a 40km/h durante 4 minutos; seguidamente va a 80km/h durante 8 minutos y, finalmente, a 32km/h durante 2 minutos. Calcule a) la distancia total recorrida en km y b) la velocidad media en km/h y m/s durante los 14 minutos.
R: a) 14,4km b) 61,8km/h 17,2m/s

23.- Un móvil que lleva una velocidad de 10m/s acelera su marcha a razón de 2m/s^2 . Calcule a) el incremento de velocidad durante 1 minuto, b) la velocidad al final del primer minuto, c) la velocidad media durante el primer minuto y d) el espacio recorrido en 1 minuto.
R: a) 120m/s b) 130m/s c) 70m/s d) 4200m

24.- Un móvil que lleva una velocidad de 8m/s acelera uniformemente su marcha, de forma que recorre 640m en 40s. Calcule a) la velocidad media durante los 40s, b) la velocidad final, c) el incremento de velocidad en el tiempo dado y d) la aceleración
R: a) 16m/s b) 24m/s c) 16m/s d) $0,4\text{m/s}^2$

25.- Expresar las siguientes aceleraciones en m/s^2 : a) 1800m/s/min, b) 1800m/min/s y c) 1800m/min/min
R: a) 30m/s^2 b) 30m/s^2 c) $0,5\text{m/s}^2$

26.- Un automóvil parte del reposo con una aceleración constante de 5m/s^2 . Calcule la velocidad que adquiere y el espacio que recorre al cabo de 4 segundos.
R: 20m/s 40m

27.- La velocidad de un vehículo aumenta uniformemente desde 15km/h, hasta 60km/h en 20s. Calcular a) la velocidad media $\bar{v}$ en km/h y en m/s, b) la aceleración a en m/s^2 y c) la distancia en metros recorrida durante este tiempo.

R: a) 37,5km/h = 10,4m/s b) 0,625m/s² c) 208m

28.- Un vehículo que marcha a una velocidad de 15m/s aumenta su velocidad a razón de 1m/s cada segundo. a) Calcule la distancia recorrida en 6 segundos. b) Si disminuye su velocidad a razón de 1m/s cada segundo, calcule la distancia recorrida en 6 segundos y el tiempo que tardará en detenerse.

R: a) 108m b) 72m y $t = 15s$.

29.- Un automóvil que marcha a una velocidad de 45km/h aplica los frenos y al cabo de 5 segundos su velocidad se ha reducido a 15km/h. Calcule a) la aceleración y b) la distancia recorrida durante los 5 segundos.

R: a) $a = -1,67m/s^2$ b) $d = 41,6m$

30.- La velocidad de un tren se reduce uniformemente de 12m/s a 5m/s. Sabiendo que durante ese tiempo recorre una distancia de 100m, calcular a) la desaceleración, b) la distancia que recorre a continuación hasta detenerse, suponiendo la misma desaceleración.

R: a) $a = -0,595m/s^2$ b) $d = 21m$

31.- Un camión viaja hacia el norte a una velocidad constante de 40km/h y en $t=0$ se localiza 500m delante de un automóvil detenido. Si el automóvil parte del reposo y acelera a $3m/s^2$, ¿cuándo rebasará al camión? ¿Qué tan alejado está el punto de encuentro a partir de la posición del auto?

R: 22,3s 747,9m

32.- Un objeto se arroja verticalmente hacia arriba y llega hasta una altura máxima de 16m. ¿Cuál fue la velocidad inicial y cuánto tiempo tardó en llegar hasta arriba?

R: 17,7m/s 1,81s

33.- Se deja caer una bola de acero desde lo alto de una torre y emplea 3 segundos en llegar al suelo. Calcule la velocidad final y la altura h de la torre.

R: $v = 29,4m/s$ $h = 44,1m$

34.- Desde un puente se lanza una piedra con una velocidad inicial de 10m/s y tarda 2 segundos en llegar al agua. Calcule la velocidad que lleva la piedra justo en el momento antes de incidir en el agua y la altura del puente.

R: $v = 29,6m/s$ $h = 39,6m$

35.- Un cuerpo cae libremente desde el reposo durante 6 segundos. Calcular la distancia que recorre en los dos últimos segundos.

R: 98m

36.- Una pelota se suelta, partiendo del reposo desde lo alto de un edificio de 100m. En el mismo instante una segunda pelota se lanza hacia arriba desde la base del edificio, con una

velocidad inicial de 50m/s. ¿Cuándo chocarán las dos pelotas y a qué distancia arriba de la calle lo harán?

R: 2s 80,4m

37.- ¿Desde qué altura debe caer el agua de una presa para golpear la rueda de la turbina con una velocidad de 40m/s?

R: 81,6m

38.- Una pelota se deja caer desde la ventana de un rascacielos y 2s después se arroja verticalmente hacia abajo una segunda pelota. ¿Cuál debe ser la velocidad inicial de la segunda pelota si alcanza a la primera justo antes de tocar el suelo 400m abajo?

R: 22,8m/s

39 Una flecha es disparada verticalmente hacia arriba con una velocidad de 40m/s. Tres segundos después se dispara otra flecha, también hacia arriba, con una velocidad de 60m/s. ¿Al cabo de cuánto tiempo y en qué posición se encontrarán las dos flechas?

R. 4,54s 80,6m

40.- Un cañón antiaéreo lanza una granada verticalmente con una velocidad de 500m/s. Calcule a) la máxima altura que alcanzará la granada, b) el tiempo que empleará en alcanzar dicha altura, c) la velocidad instantánea al final de los 40 segundos y 60 segundos y d) ¿En qué instantes pasará la granada por un punto ubicado a 10km de altura? Desprecie la resistencia del aire.

R: a) 12755m b) 51s c) Para $t = 40s$ $v = +108m/s$ (hacia arriba). Para $t = 60s$ $v = -88,2m/s$ (hacia abajo) d) 27,3s y 74,7s.

41.- Se lanza verticalmente una pelota de forma tal, que al cabo de 4s regresa de nuevo al punto de partida. Calcule la velocidad inicial con la que se lanzó.

R: 19,6m/s

42.- Desde un globo, a una altura de 175m sobre el suelo y ascendiendo con una velocidad de 8m/s, se deja caer un objeto. Calcule a) la máxima altura alcanzada por éste, b) la posición y la velocidad del objeto al cabo de 5 segundos y c) el tiempo que tardará en llegar al suelo.

R: a) 178,26m b) 92,5m -41m/s (hacia abajo) c) 6,8s

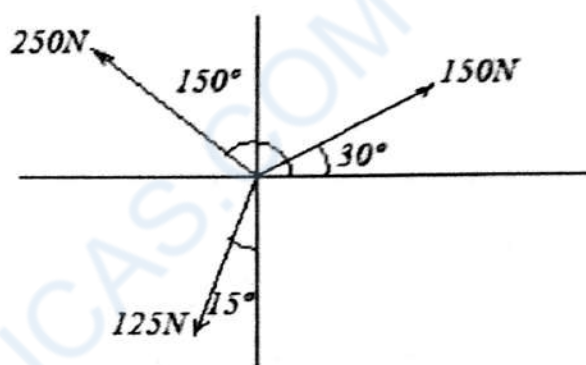
b) Ejercicios adicionales sin la inclusión del resultado (Ejercite su aprendizaje)

1.- Un objeto cae desde una altura de 120m. Determine la distancia que recorre durante su último segundo en el aire.

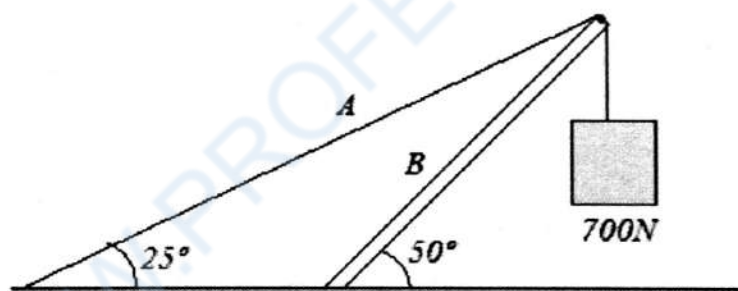
2.- Una piedra que cae de lo alto de un acantilado recorre un tercio de su distancia total al suelo en el último segundo de su caída. ¿Qué altura tiene el acantilado?

3.- Una fuerza de 160N actúa simultáneamente con una fuerza de 400N dirigida hacia la derecha. Encuentre la resultante mediante el método del polígono de fuerzas. Compruebe la respuesta, utilizando el método del paralelogramo.

4.- Determine la resultante de las fuerzas de la figura siguiente:



5) Determine la compresión del montante B y la tensión en la cuerda A, para la disposición de la figura siguiente:

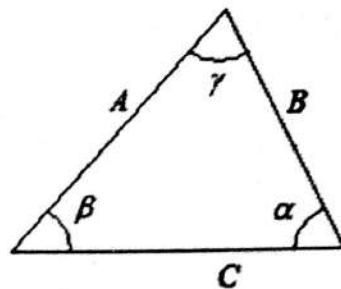


Resumen de las fórmulas empleadas en la guía

Resolución de triángulos:

Suma de los ángulos interiores: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

$$\text{Ley de los cosenos} \begin{cases} A^2 = B^2 + C^2 - 2BC \cos \alpha \\ B^2 = A^2 + C^2 - 2AC \cos \beta \\ C^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos \gamma \end{cases}$$



$$\text{Ley de los senos: } \frac{A}{\sin \alpha} = \frac{B}{\sin \beta} = \frac{C}{\sin \gamma}$$

Componentes de un vector:

$$\vec{A}_x = A \cos \theta$$

$$\vec{A}_y = A \sin \theta$$

Componentes de la resultante:

$$R_x = A_{1x} + A_{2x} + \dots$$

$$R_y = A_{1y} + A_{2y} + \dots$$

Módulo de la resultante:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

Ángulo que forma la resultante con la horizontal

$$\tan \theta = \frac{R_y}{R_x}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{R_y}{R_x}$$

Producto escalar de vectores:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta$$

Producto escalar en función de las componentes del vector:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y$$

Trabajo de una fuerza constante:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = Fd \cos \theta$$

Primera ley de Newton. Equilibrio de traslación de una partícula:

$$\sum \vec{F} = 0$$

$$\sum \vec{F}_x = 0$$

$$\sum \vec{F}_y = 0$$

Cinemática:

Desplazamiento de un cuerpo entre dos posiciones:

$$\vec{s} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

Rapidez promedio de un móvil:

$$\text{Rapidez promedio} = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo total}} = \frac{\Delta d}{\Delta t}$$

Velocidad promedio para un móvil que se desplaza en la dirección x :

$$\bar{v} = \frac{\text{Desplazamiento}}{\text{tiempo total}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Aceleración promedio:

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0}$$

Movimiento rectilíneo uniforme. Fórmula de la velocidad:

$$v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado. Ecuaciones cinemáticas:

$$v = v_0 + at$$

$$\bar{v} = \frac{v + v_0}{2}$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

$$v^2 - v_0^2 = 2ax$$

Caída libre vertical. Ecuaciones cinemáticas:

$$v = v_0 - gt$$

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} gt^2$$

$$y - y_0 = \frac{v + v_0}{2} t$$

$$v^2 - v_0^2 = -2gy$$

Apéndice: Notación científica, cifras significativas y consistencia dimensional

Contenido

Magnitudes físicas. Sistemas de unidades

1. Notación científica
2. Cifras significativas.
3. Consistencia dimensional.

1.- Notación científica:

Se denomina notación científica a la forma de representar una cantidad, mediante el producto de un número comprendido entre uno y diez, por una potencia entera de 10. Por ejemplo:

a)

200 se presenta como $2,0 \cdot 10^2$.

El exponente de 10 es igual al número de ceros que siguen al dígito de las unidades. Para un número expresado en notación científica con exponente positivo, si se quiere representarlo decimalmente, el punto decimal debe moverse hacia la derecha tantos ceros como sea el orden de la potencia de 10.

b)

0,00037 es representado como $3,7 \cdot 10^{-4}$.

Los números menores que 1 se escriben como el producto de un número del 1 al 10, multiplicado por 10 elevado a una potencia entera negativa. Cuando se quiere representar decimalmente una cantidad expresada en notación científica con exponente negativo, el punto decimal se mueve a la izquierda una vez por cada potencia de 10.

Este tipo de representación de un número es apta especialmente, cuando los números son muy grandes o muy pequeños y acarrean una gran cantidad de ceros, debiendo operar con ellos.

La regla de operación para la multiplicación y división entre estos números es la siguiente: cuando se multiplican dos números enteros en notación científica, se suman los exponentes de las potencias de 10. Al dividir se resta el exponente del divisor, del exponente del dividendo.

Ejemplos:

$$\begin{aligned} 7,66 \cdot 10^8 \cdot 4,02 \cdot 10^{-3} &= 30,8 \cdot 10^5 = 3,08 \cdot 10^6 \\ 3,26 \cdot 10^3 / 4,30 \cdot 10^5 &= 0,758 \cdot 10^{-2} = 7,58 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

Para la suma o resta de cantidades expresadas en notación científica, conviene atenerse a las reglas sobre cifras significativas, que se analiza a continuación

Es conveniente ahora, que haga la ejercitación N° 1 para consolidar lo aprendido:

Resuelva los siguientes ejercicios, expresando los resultados en notación científica. Una vez obtenido el resultado expréselo en numeración decimal. Puede ayudarse con una calculadora científica. Se sugiere transformar primero todos los números a notación científica antes de efectuar las operaciones:

$$a) \frac{(3,25 \times 10^{-3})(0,000035)}{2,7 \times 10^{11}}$$

$$b) \frac{(6,3 \times 10^{-4})^3 (0,88 \times 10^7)}{(4,9 \times 10^{13})^{\frac{1}{2}}}$$

$$c) (12,8)(8,2 \times 10^7)(3,6 \times 10^{-9}) - 10,7$$

$$2,7 \times 10^{17}$$

$$d) \frac{(4,6 \times 10^{13})(0,00065)}{(6,42 \times 10^{-36})^{\frac{1}{3}}}$$

$$e) \frac{[(6,8 \times 10^{-4})(1,7 \times 10^{18})]^{\frac{1}{2}}}{(6,0 \times 10^{12})(4,0 \times 10^{-8})(0,0040)}$$

$$f) \frac{(1,5 \times 10^5)}{(9,0 \times 10^7)(3 \times 10^{-6})}$$

$$g) (9,0 \times 10^7)(3 \times 10^{-6})$$

$$h) \frac{(3,6 \times 10^5)^{\frac{1}{2}} (4 \times 10^{-2})}{(3 \times 10^3)^{-2}}$$

Solución N° 18

2.- Cifras significativas

En la física debemos distinguir entre las **cantidades exactas**, que son números tales como 2, 8 ó 100 que no tienen ninguna incertidumbre o error y las cantidades que surgen de un proceso de medición, denominadas **cantidades medidas**. La exactitud de estas últimas dependerá de la precisión que tenga el instrumento utilizado en dicho proceso.

Si estamos usando un metro de albañil para medir una longitud, posiblemente no podamos apreciar menos de 0,1 cm. Cuando decimos que la medida de una longitud es de 8,4 cm, lo más que podemos asegurar es que dicha longitud se encuentra entre 8,3 y 8,5 cm.

Las cantidades medidas pueden intervenir en operaciones matemáticas.

EJEMPLO

Supongamos que la medida anterior era el radio de un círculo y queremos conocer la superficie de éste.

El área del círculo, recordemos que es:

$$A = \pi \cdot R^2 = 3,1415926... \times 8,4^2 = 221,670777637..$$

Al resultado lo hemos escrito con los decimales que nos da una calculadora científica. Pero, ¿con cuántos decimales debemos tomar a π ? ¿Mientras más decimales tomemos, más exacto será el resultado? π es un número irracional y tiene infinitos decimales.

En el ejemplo que estamos analizando, el número de cifras significativas que puede obtenerse de la medición con un metro de albañil, de una manera confiable, es de dos cifras.

Se denominan **cifras significativas**, al número de dígitos de la cantidad medida, que se pueden obtener de manera confiable a partir del proceso de medición. Es el número de dígitos que se lee del instrumento al medir, más un dígito interpolado al estimar una fracción de división entre dos marcas de la escala del instrumento

Por otra parte:

Cuando se realiza una multiplicación o una división con cantidades medidas, el resultado no dará mayor número de cifras significativas que la cantidad menos precisa o que tenga el menor número de cifras significativas.

Por lo tanto, no tiene mayor sentido emplear para π más de dos cifras significativas, ($\pi \approx 3,1$) ya que la medición con el metro de albañil tiene esa cantidad de dígitos y el resultado tendrá también dos números significativos; de manera que podemos decir que el área del círculo es de $2,2 \cdot 10^2 \text{ cm}^2$ ó 220 cm^2 con una precisión ubicada entre 210 y 230 cm^2 .

Si con un instrumento se mide una longitud como $3,5\text{cm}$ y con otro $3,54$, del segundo se obtiene mayor número de cifras significativas

19

¿El albañil debería utilizar instrumentos de medición de longitud más precisos? ¿Cuál es su opinión?

.....

Para determinar las cifras significativas de una cantidad, se aplican las siguientes reglas

- 1) Los ceros utilizados en la colocación de la coma o al comienzo de un número no son significativos.
Ejemplo: $0,000328\text{m}$, sólo tiene tres cifras significativas.
- 2) Sí son significativos los ceros que están dentro de un número. Ejemplo: 50027 tiene cinco cifras significativas.
- 3) Los ceros al final de un número después de la coma, también son significativos: el número $3040,0$ tiene cinco cifras significativas.

4) Los ceros en números enteros sin punto decimal, pueden ser o no significativos. Ejemplo 200 m $\underline{200}\text{ m}$ 200 m . Para eliminar la ambigüedad, en estos casos es preferible utilizar la notación científica.

5) Cuando se suman o restan cantidades medidas, el resultado nunca podrá tener mayor cantidad de decimales significativos que el sumando que tenga menor número de decimales

Por ejemplo: $23,5 + 7,46 = 30,96 \approx 31,0$. Como el resultado no puede tener más de tres significativas, la última cifra se redondea.

6) Cuando se multiplican o dividen dos o más cantidades, el número de cifras significativas del resultado es igual al del número menos preciso o con menor número de cifras significativas.

Ejemplo: si multiplicamos $4,53$, con tres cifras significativas, por $3,7$ que posee solo dos, el resultado:

$4,53 \times 3,7 = 16,761 \approx 17$. El resultado no puede tener más de dos cifras. Observe que la última cifra se redondea.

7) Reglas para el redondeo de la última cifra: si la cifra siguiente a la última cifra es superior a 5, aumentar la cifra significativa en 1; si es menor a 5 dejarla igual. Cuando se efectúan varias operaciones con una calculadora, es recomendable aplicar el redondeo al final con el fin de no acumular errores.

20

1) Determine las cifras significativas de los siguientes números: a) $25,0\text{m}$, b) $0,00037\text{dm}^3$, c) $3,589\text{kg}$, d) $3,25 \cdot 10^{-5}\text{s}$, e) $2,70 \cdot 10^3\text{m}^3$.

2) El radio de un círculo es de $3,5 \pm 0,2\text{cm}$. Calcule el área.

3) Efectúe las siguientes operaciones e indique cuántas cifras significativas tiene el resultado:
a) $325 + 37,2 + 0,95 + 25,6$ b) $3,7 \times 4,763$ c) $5,6 / \pi$.

4) Una habitación posee un ancho de $(3,25 \pm 0,02)\text{m}$ y un largo de $(4,75 \pm 0,05)\text{cm}$. Determine la superficie en m^2 y la incertidumbre en el valor calculado.

5) ¿Cuántas cifras significativas tienen las siguientes cantidades medidas?

a) $0,375 \times 10^2\text{ m}$ b) $0,052 \times 10^{-2}\text{ km}$ c) $0,000475\text{g}$ d) $0,007890\text{m}$ e) $0,0005210\text{s}$ f) $2,7500\text{litros}$

6) Exprese correctamente, de acuerdo con las reglas sobre cifras significativas, el resultado de la siguiente suma: $23,5\text{m} + 0,146\text{m} + 1,45\text{m} =$

7) Respetando las reglas sobre cifras significativas, calcule el volumen de una caja rectangular que posee una altura de $27,5\text{cm}$, un ancho de $19,2\text{cm}$ y una profundidad de $5,9\text{cm}$.

8) Aplique la regla de las cifras significativas a la siguiente multiplicación de cantidades medidas: $1,35\text{m} \times 0,07\text{m} =$

9.- Determine la cantidad de cifras significativas que tiene el resultado de la siguiente división:

$$\begin{array}{r} 5,31\text{m} \\ 1,675\text{m} \end{array}$$

10) Exprese el siguiente número, con tres cifras significativas $0,0026372\text{km}$

Solución N° 20

3.- Consistencia dimensional

Utilizamos la palabra **dimensión**, para indicar la naturaleza física que tiene una cantidad.

Por ejemplo:

La distancia puede medirse en diferentes unidades, pero su dimensión es la longitud [L]. Hemos dicho que para la mecánica se definen solo tres cantidades fundamentales; las dimensiones de estas cantidades son: la longitud [L], la masa [M] y el tiempo [T].

Las dimensiones pueden ser simples, como las que acabamos de ver, o compuestas. Un ejemplo de esto último es la velocidad, cuya unidad de medida es el metro sobre segundo (m/s). En dimensiones esto es: [L] / [T].

Para indicar la dimensión de una cantidad física se utilizan los corchetes [].

Toda ecuación física debe ser consistente dimensionalmente. No podemos sumar longitudes con masas; tampoco longitudes expresadas en milímetros con longitudes expresadas en metros. Las magnitudes que se suman o se igualan deben ser de la misma especie y tener las mismas unidades. Sin embargo, sí es posible dividir o multiplicar dimensiones diferentes, siempre que la operación que se ejecuta con ellas obedezca a alguna ecuación física

Por ejemplo, un cuerpo que se desplaza con rapidez constante v , recorre una distancia d en un tiempo t ; en donde d se mide en metros y t en segundos. Veremos en Cinemática que estas tres cantidades se relacionan de la siguiente forma:

$$d = v \cdot t$$

Para la consistencia dimensional, es necesario que el producto $v \cdot t$ se mida también en metros; es decir por ejemplo:

$$20m = \left(5 \frac{m}{s} \right) \times (4s) = 20m$$

21

Responda al siguiente cuestionario

1) Demuestre que la ecuación $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ es dimensionalmente correcta, siendo x y x_0 longitudes; v_0 una velocidad; a una aceleración y t el tiempo. ¿Dónde se emplea esta ecuación?

2) Determine si la ecuación $a = \frac{v^2 - v_0^2}{2x}$ es dimensionalmente correcta. v y v_0 son velocidades; x es una longitud y a es una aceleración. Averigüe dónde es empleada.

3) Determine si la ecuación $y = \frac{v}{2g}$ es dimensionalmente correcta. y longitud; v velocidad y g aceleración.

4) Determine si alguna de las siguientes ecuaciones ha sido escrita correctamente, para un movimiento uniformemente acelerado

$$= v_0 + \frac{1}{2} a t^2 \quad v^2 - v_0^2 = 2 a x^2 \quad x = v_0 t + \frac{1}{2} a t$$

-Siendo v velocidad final, v_0 velocidad inicial, x desplazamiento, a aceleración y t tiempo

5) ¿Cuál de las siguientes fórmulas tiene dimensiones correspondientes a una aceleración (v velocidad, x distancia y t tiempo)?:

a) v / t^2 b) v / x^2 c) v^2 / t d) v^2 / x

Solución N°21.

SOLUCIONES A LAS ACTIVIDADES DE PROCESO

1.- a) $4,2 \cdot 10^{-19} = 0,00000000000000000042$

b) $3,14 \cdot 10^{-10} = 0,000000000314$

c) -6,9

d) $9,0 \cdot 10^6 = 9000000$

e) $5,6 \cdot 10^{-20} = 0,0000000000000000000056$

f) $6,4 \cdot 10^{-3} = 0,0064$

g) 270

h) $2,2 \cdot 10^{-8} = 0,000000022$

3.- 1) a) 3 cifras significativas, b) dos, c) cuatro, d) tres, e) tres

2) El radio es $3,5 \pm 0,2 \text{ cm}$. Está comprendido entre 3,3 cm y 3,7 cm.

Area = $\pi \times r^2 = 3,1 \times 3,5^2 = 37,975 \approx 38 \text{ cm}^2$

Comprendida entre: $3,1 \times 3,3^2 = 33,759 \approx 34 \text{ cm}^2$; y: $3,1 \times 3,7^2 = 42,439 \approx 42 \text{ cm}^2$

El resultado es $38 \pm 4 \text{ cm}^2$.

3) a) $325 + 37,2 + 0,95 + 25,6 = 388,75 \approx 389$.

También puede resolverse, redondeando los números al que menor cantidad de decimales tenga: $325 + 37 + 1 + 26 = 389$

b) $3,7 \times 4,763 = 17,6231 \approx 18$

c) $5,6 / \pi = 1,782435 \dots \approx 1,8$

4) Superficie igual a $(3,25 \pm 0,02) \times (4,75 \pm 0,05) =$

$= 3,25 \times 4,75 \pm 3,25 \times 0,05 \pm 4,75 \times 0,02 =$

$= 15,4375 \pm 0,1625 \pm 0,095 = 15,4 \pm 0,3$.

Otra forma de resolver el ejercicio es considerar que los números están comprendidos entre 3,23 a 3,27 y 4,70 a 4,80.

$3,23 \times 4,70 = 15,2$

$3,25 \times 4,75 = 15,4$

$3,27 \times 4,80 = 15,7$.

O sea 15,4 que está comprendido entre 15,2 y 15,7.

5) a) tres b) dos c) tres d) cuatro e) cuatro f) cinco

6) $168,646 \approx 169 \text{ m}$

7) $3,1 \cdot 10^3 \text{ cm}^3$

8) $0,09 \text{ m}^2$

9) 3,17. Tres cifras significativas

10) $0,00264 \text{ km}$

4.- 1) Se plantea:

$$[L]^1 = [L] + \left[\frac{L}{T} \right] [T] + \left[\frac{L}{T^2} \right] [T]^2 = [L] + \left[\frac{L}{T} \right] [T] + \left[\frac{L}{T^2} \right] [T]^2 = [L]^1$$

La ecuación es dimensionalmente correcta. Esta ecuación permite determinar el desplazamiento en el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado

2) Planteamos:

$$\left[\frac{L}{T^2} \right] = \frac{\left[\frac{L}{T} \right]^2 - \left[\frac{L}{T} \right]^2}{L} = \frac{\left[\frac{L^2}{T^2} \right] - \left[\frac{L^2}{T^2} \right]}{[L]} = \left[\frac{L}{T^2} \right] - \left[\frac{L}{T^2} \right]$$

La ecuación es dimensionalmente correcta y se emplea en el estudio del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado

3) Para este caso se plantea:

$$[L] = \frac{\left[\frac{L}{T} \right]}{\left[\frac{L}{T^2} \right]} = \frac{\left[\frac{L}{T} \right]}{\left[\frac{L}{T^2} \right]} = [T] \text{ Esta ecuación no es correcta dimensionalmente.}$$

4) Aquí planteamos:

$$\text{Para la primera ecuación } \left[\frac{L}{T} \right]' = \left[\frac{L}{T} \right] + \left[\frac{L}{T} \right] \cdot [T]^2 = \left[\frac{L}{T} \right] + [L \cdot T] \text{ No hay consistencia}$$

$$\text{Segunda ecuación } \left[\frac{L}{T} \right]^2 - \left[\frac{L}{T} \right]^2 = \left[\frac{L}{T^2} \right] \cdot [L]^2 = \left[\frac{L^3}{T^2} \right] \text{ Sin consistencia}$$

$$\text{Tercera ecuación } [L]' = \left[\frac{L}{T} \right] \cdot [T] + \left[\frac{L}{T^2} \right] \cdot [T] = [L] + \left[\frac{L}{T} \right] \text{ Tampoco hay consistencia}$$

5) Las dimensión de la aceleración es: $\left[\frac{L}{T^2} \right]$

$$\text{a) } \frac{\left[\frac{L}{T} \right]}{[T]^2} = \left[\frac{L}{T^3} \right] \text{ No es una aceleración}$$

$$\text{b) } \frac{\left[\frac{L}{T} \right]}{[L]^2} = \left[\frac{1}{L \cdot T} \right] \text{ Tampoco es aceleración}$$

$$\text{c) } \frac{\left[\frac{L}{T} \right]^2}{[L]} = \left[\frac{L}{T^2} \right] \text{ Estas sí son dimensiones de aceleración}$$

Nudo X:

$$T_{Cx} = T_C \times \cos 60^\circ = 0,5T_C$$

$$T_{Cy} = T_C \times \sin 60^\circ = 0,87T_C$$

$$T'_{Cx} = T_C \times \cos 120^\circ = -0,5T_C$$

$$T'_{Cy} = T_C \times \sin 120^\circ = 0,87T_C$$

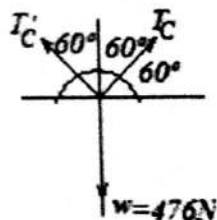
$$\Sigma F_x = T_{Cx} - T'_{Cx} = 0$$

$$T_{Cx} = T'_{Cx} \text{ y también, por simetría } T_C = T_{C'}$$

$$\Sigma F_y = T_{Cy} + T'_{Cy} - w = 0$$

$$0,87T_C + 0,87T_C - w = 0$$

$$1,73T_C = w ; T_C = \frac{w}{1,73} = \frac{476 \text{ N}}{1,73} = 275 \text{ N} = T_{C'}$$



Nudo Y:

$$T_C = T'_{C'}$$

$$T_{Ax} = T_A \times \cos 30^\circ = 0,87T_A$$

$$T_{Ay} = T_A \times \sin 30^\circ = 0,5T_A$$

$$T_{Bx} = T_B \times \cos 180^\circ = -T_B$$

$$T_{By} = T_B \times \sin 180^\circ = 0$$

$$T'_{Cx} = T'_C \times \cos 240^\circ = -0,5T'_C = -0,5 \times 275 \text{ N} = -137,5 \text{ N}$$

$$T'_{Cy} = T'_C \times \sin 240^\circ = -0,87T'_C = -0,87 \times 275 \text{ N} = -238 \text{ N}$$

Planteamos ahora las condiciones de equilibrio del nudo Y:

$$\Sigma F_x = 0,87T_A - T_B - T'_{Cx} = 0$$

$$\Sigma F_y = T_{Ay} + T'_{Cy} = 0 ; T_{Ay} = -T'_{Cy} = 238 \text{ N}$$

$$T_A = \frac{T_{Ay}}{0,5} = \frac{238 \text{ N}}{0,5} = 476 \text{ N}$$

$$\Sigma F_x = 0,87 \times 476 \text{ N} - T_B - 238 \text{ N} = 0$$

$$-T_B = -414 \text{ N} + 238 \text{ N} = -176 \text{ N}$$

Por razones de simetría, no es necesario plantear las ecuaciones para el nudo Z

Resulta: (valores modulares)

$$T_C = T'_C = T_{C'} = T'_{C'} = 275 \text{ N}$$

$$T_B = T'_B = 176 \text{ N}$$

$$T_A = T'_A = T_{A'} = T'_{A'} = 476 \text{ N}$$

